118 Exemples d'utilisation de la notion de dimension en algèbre et géométrie

Cadre : E un espace vectoriel de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$, sur un corps K.

I. Utilisation de la théorie de dimension [OA]

1. Dimension et bases

Applications du fait qu'une famille de cardinal $n+1$ est liée dans E : (1) A une K-algèbre de dimension finie n et $a \in A$ alors il existe un unique polynôme unitaire de degré $= \min\{d \in \mathbb{N}, (1, a, \dots, a^d)$ est liée$\}$

Rq : Ce résultat est souvent utilisé pour $A = \mathcal{L}(E)$

(2) Thm de Carathéodory : si $K = \mathbb{R}$ et S une partie de E alors l'enveloppe convexe de E est égale à l'union des $C = \{x \in E, \exists (\lambda_i)_{1 \le i \le k}$ avec $\sum \lambda_i = 1$, $\exists (x_i)_{1 \le i \le k} \in S$ tels que $x = \sum \lambda_i x_i$ pour k allant de 1 à $n+1$ [DVT 1]

Appl : L'enveloppe convexe d'une partie compacte A de E est compacte.

Applications du thm de la base incomplète

(1) Les orbites de l'action $GL(E) \times E \to E$, $(f, v) \mapsto f(v)$ sont $\{0\}$ et $E \setminus \{0\}$

(2) Il existe une base de $M_n(\mathbb{C})$ formée de matrices inversibles (ou de matrices diagonalisables)

(3) Existence de supplémentaires : F un sous espace vectoriel de E alors il existe un sous espace vectoriel G tel que $E = F \oplus G$.

Application directe de la définition de dimension : Soient $x_0, \dots, x_n$ des points de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts.

$\forall i \in [\![0, n]\!]$, $l_i : x \mapsto \prod_{j \ne i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$. Alors comme les $(l_i)_{0 \le i \le n}$ sont libres et forment une famille de cardinal $n+1$: $(l_i)_{0 \le i \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Applications linéaires, bilinéaires, matrices et rang

Prop : Soit F un sous espace de E alors $\dim F \le \dim E$ et si $\dim E = \dim F$ alors $E = F$.

Appl : $f \in \mathcal{L}(E, K)$ est soit nulle, soit surjective.

Applications du théorème du rang

(1) Formule de Grassmann : F et G sous espaces de E alors $\dim(F \cap G) + \dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Application en géométrie projective : deux droites projectives d'un plan projectif se coupent.

(2) Caractérisation des isomorphismes : $u \in \mathcal{L}(E)$ u bijective ssi u injective ssi u surjective ssi $rg(u) = n$

(3) A une K-algèbre commutative de dimension finie alors A intègre ssi A un corps

Une autre application du rang : La caractérisation des matrices équivalentes dans $M_n(K)$: A et B sont équivalentes dans $M_n(K)$ ssi $rg(A) = rg(B)$.

Étude des formes quadratiques : Soit q une forme quadratique sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note r (respectivement s) la dimension du sous espace vectoriel sur lequel q est définie positive (respectivement négative). (r, s) est la signature de q et $r + s = rg(q)$.

Soient q_1 et q_2 2 formes quadratiques, elles sont équivalentes ssi elles ont même signature.

Appl : Classification affine des coniques

Dualité : $\dim E = \dim E^*$

Application : Comme $\varphi : M_n(K) \to M_n^*(K)$, $A \mapsto [M \mapsto tr(AM)]$ est injective, elle est bijective.

D'où $\forall f \in M_n^*(K), \exists M \in M_n(K), \forall A \in M_n(K), f(A) = tr(AM)$.

3. Raisonnement par récurrence

Le fait que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ permet de faire des raisonnements par récurrence.

a) Pour la réduction des endomorphismes : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Applications : (1) Caractérisation de la trigonalisation $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi χ_u est scindé.

(2) Réduction des endomorphismes symétriques : $u \in S_n(K)$ alors u est diagonalisable dans une base orthonormée.

b) Pour trouver des générateurs.

Applications : (1) $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations.

(2) Une isométrie d'un espace affine euclidien de dimension n est produit d'au plus $n+1$ réflexions. [DVT2]

II. Application à la théorie des corps [GOZ]

1. Extension de corps et degré [ESC]

Déf : Soit K un corps. On appelle extension de corps, tout corps L tel qu'il existe un morphisme de corps $j : K \to L$.

Exs : $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ est une extension de $\mathbb{Q}$

Déf : Soit L une extension d'un corps K. On appelle degré de l'extension L de K et on note $[L : K]$ la dimension de L comme K-espace vectoriel ie $\dim_K L$

Exs : $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = +\infty$ $[\mathbb{Q} : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$

Multiplicativité du degré : L un corps, K un sous corps de L. E un L-espace vectoriel. Les conditions suivantes sont équivalentes : (i) E est un K-espace vectoriel de dimension finie (ii) E est un L-espace vectoriel de dimension finie et L est un K-espace vectoriel de dimension finie.

Et alors : $\dim_L E = \dim_K E \cdot \dim_K L$.

Applications : On prend L une extension de K telle que $[L : K] = n$ alors (*) si $n = 1$, $L = K$.

(*) si L' est une extension de K contenue dans L et de degré n, $L = L'$

(*) si n est premier, il n'existe pas de corps contenant K et strictement contenu dans L.

Application : Trouver tous les sous corps d'un corps fini.

2. Extension monogène, éléments algébriques et transcendants.

Notation : L une extension de K
$a \in L$.

Déf (i) S'il existe $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$ alors on dit que a est un élément algébrique sur K.

(ii) Sinon, on dit que a est un élément transcendant sur K.
Prop: Pour un élément algébrique, on a l'existence et l'unicité d'un polynôme minimal, on le note $M_{a,K}(X)$.
Ex: On considère l'extension $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha = 2^{1/n}$ alors $M_{a,\mathbb{Q}}(X) = X^n - 2$.

Thm de structure des extensions monogènes
Soit L une extension de K, $a \in L$ alors :
(i) ou bien a est transcendant sur K et alors $\begin{pmatrix} K(X) \to K(a) \\ P(X) \mapsto P(a) \end{pmatrix}$ est un K-isomorphisme de corps et $[K(a):K] = +\infty$.
(ii) ou bien a est algébrique sur K et alors $K(a) = K[a]$ et l'application $\begin{pmatrix} K[X]/M_{a,K}(X) \to K(a) \\ \overline{P(X)} \mapsto P(a) \end{pmatrix}$ est un K-isomorphisme de corps et $[K(a):K] = \deg(M_{a,K}(X))$

Ex: Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. $X^2 - d \in \mathbb{Q}[X]$ est le polynôme minimal de $\sqrt{d}$.
L'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \simeq \mathbb{Q}[X]/(X^2-d)$ est donc un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $(1, \sqrt{d})$.
Thm de l'élément primitif : L'extension de degré fini et séparable de K alors $\exists \alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$.

III. Quelques comportements exceptionnels en dimension 2 et 3.

1. Dans le groupe linéaire $GL(E)$ [PER]

Quelques différences autour de la simplicité de $PSL_n(K)$:
$PSL_n(K)$ est simple sauf si, $n = 2$ et $K = \mathbb{F}_2$
$n = 2$ et $K = \mathbb{F}_3$.

2. Dans le groupe spécial orthogonal [AUD]

On étudie $SO_2(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal en dimension 2.
Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est isomorphe et homéomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 ($\mathbb{U}$)
Appl: $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
Faux en dimension 3 ! par exemple, deux rotations qui n'ont pas le même axe.

Prop: L'application : $\mathbb{R} \to \mathbb{U} \to SO_2(\mathbb{R})$
$\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
induit un isomorphisme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq SO_2(\mathbb{R})$
L'image du réel θ s'appelle rotation d'angle θ.

Prop: $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\exists! f \in SO_2(\mathbb{R})$ tel que $f(u) = v$
Prop/Def: $\hat{A}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$. On a une action de groupe :
$$\begin{array}{ccc} \hat{A} \times SO_2(\mathbb{R}) & \to & \hat{A} \\ ((u,v), f) & \mapsto & (f(u), f(v)) \end{array}$$
Les orbites sous cette action sont appelées les angles orientés de vecteurs. Cet ensemble est noté A.

Rq: Quand on fait agir $SO_3(\mathbb{R})$ sur les couples de $\mathbb{R}^3$, les orbites sont les mêmes que sous l'action [?] de $O_3(\mathbb{R})$ donc on perd l'orientation des angles.
[M]