n° 128

Endomorphismes trigonalisables, Endomorphismes nilpotents

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Endomorphismes trigonalisables.

1) Définition et caractérisations de la trigonalisabilité.

Définition: [GO]
u est trigonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, u$ soit triangulaire supérieure.

Exemple: u défini par $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_2 + e_1$, $u(e_3) = e_3 + e_2 + e_1$ avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Conséquences:
- les valeurs sur la diagonale sont les valeurs propres de u.
- $\det u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (où les λ_i sont les valeurs propres de u, comptées avec leur multiplicité).
- $\mathrm{Spec}(u^2) = \mathrm{Spec}(u)^2$, $\mathrm{Spec}(\exp(u)) = \exp(\mathrm{Spec}(u))$

Contre-exemple dans le cas non-trigonalisable: [OA]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Spec}(A) = \emptyset$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Spec}(A^2) = \{-1\}$$

Théorème de Cayley-Hamilton: [GO]
Soit χ_u le polynôme caractéristique de u. Alors, $\chi_u(u) = 0$.

Théorème (caractérisation de la trigonalisabilité): [GO]
u trigonalisable $\iff \chi_u$ est scindé
$\iff \Pi_u$ est scindé (Π_u est le polynôme minimal de u)
$\iff u$ annule un polynome scindé de $k[X]$.

Exemple: [GO] $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -(X-1)^2(X+2)$

Conséquence: Pour $k = \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

Théorème (trigonalisation simultanée): [GO]
u, v trigonalisables. Si u et v commutent, alors il existe une base commune de trigonalisation de u et v.

Application: Soient u et v trigonalisables telsque u et v commutent. Alors, $u+v$ et $u \circ v$ sont trigonalisables.

Théorème: [TAU]
Soit F un sous-espace stable par u et $w \in \mathcal{L}(E/F)$ l'application définie par $\forall \bar{x} \in E/F$, $w(\bar{x}) = \overline{u(x)}$. Alors,
u trigonalisable $\iff u_{|F}$ et w trigonalisables.

2) Sous-espaces caractéristiques.

Lemme des noyaux: [GO]
Si $P, Q \in k[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$, alors

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$$

Décomposition en sous-espaces caractéristiques: [GO]
Soit u trigonalisable. $\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, où les λ_i sont distincts.
On appelle sous-espace caractéristique

$$F_i = \ker((u - \lambda_i Id)^{\alpha_i}), \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

Alors, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Applications:
- sur un sous-espace caractéristique, u est de la forme $h + n$ avec h une homothétie et n nilpotent.
- si F est stable par u, alors $F = \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap F_i)$ et $u_{|F}$ est trigonalisable.

3) Commutant et trigonalisation. [X-ENS 2]

Prop: Si A commute avec $[A,B] = AB - BA$ et B commute avec $[A,B]$, alors A, B et $[A,B]$ sont simultanément trigonalisables.

Prop: Si $[A,B] = \lambda A + \mu B$ avec $\lambda, \mu \in k$, alors A et B sont simultanément trigonalisables.

Prop : Si $\mathrm{rang}([A,B]) \leq 1$, alors
A et B sont simultanément trigonalisables.

II - Endomorphismes nilpotents.

1) Définition et caractérisations de la nilpotence.

Définition : [GO]
u est nilpotent si $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $u^p = 0$.
On appelle ordre de nilpotence, le plus petit indice p tel que $u^p = 0$. On note $\mathcal{N}$, l'ensemble des nilpotents.

Remarque : Si $u \in \mathcal{N}$, u est trigonalisable (car annule X^p)

Exemples : [OA]
- Si $A \in \mathcal{N}$, alors $M \mapsto AM$ est nilpotent.
- $M \mapsto AM - MA$ est nilpotent si et seulement si $A = \lambda \mathrm{Id} + N$, $N \in \mathcal{N}$.
- $k_n[X] \to k_n[X]$, $P \mapsto P'$ est nilpotent. (ce n'est plus vrai si on remplace $k_n[X]$ par $k[X]$)

Prop : [GO]
u est nilpotent $\iff \chi_u = (-1)^n X^n$
$\iff \exists p,\ \Pi_u = X^p$ (p est l'ordre de nilpotence)
$\iff u$ trigonalisable de seule valeur propre 0.

Il ne suffit pas d'avoir "u a pour seule valeur propre 0" : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Prop : [X-ENS 2]
u est nilpotent $\iff \forall k \geq 1$, $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ **Développement**

Application : théorème de Burnside
Tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini.

Prop : [FR]
Soit u nilpotent d'ordre p, alors, $\exists x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

Prop : [GO]
Soit u nilpotent d'ordre p, alors
$\mathrm{Im}(u^q)$ décroît strictement jusque $q = p$.

Prop : [GO]
Soit u nilpotent d'ordre p. $r = \dim \mathrm{Ker}\, u$. Alors, $r \neq 0$ et
$$\frac{n}{r} \leq q \leq n + 1 - r$$

Prop : [X-ENS 2]
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
A nilpotente $\iff \exists (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\begin{cases} \forall k \geq 0,\ A_k \text{ semblable à } A \\ A_k \xrightarrow{k \to \infty} 0 \end{cases}$

Prop : [FR]
Soit u et v tels que v nilpotent et $u \circ v = v \circ u$.
Alors, $\begin{cases} \det(u+v) = \det(u) \\ \chi_{u+v} = \chi_u \end{cases}$

2) Etude de $\mathcal{N}$

Prop : $\mathcal{N}$ est un cône : [OA]
Si $u \in \mathcal{N}$ et $\lambda \in k$, alors $\lambda u \in \mathcal{N}$.

Prop : [
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{N}$ tels que $u \circ f = f \circ u$, alors $u \circ f \in \mathcal{N}$.

Remarque :
$\mathcal{N}$ n'est ni un sous-espace vectoriel, ni un idéal de $\mathcal{L}(E)$:
$\mathcal{N}$ n'est pas stable par addition : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Prop : [OA] $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

Prop : [X-ENS 2]
Le seul endomorphisme nilpotent et semi-simple est l'endomorphisme nul.

Définition : $\mathcal{U} = \{ u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \exists n \in \mathcal{N},\ u = \mathrm{Id} + n \}$

Prop : [FR]
$\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{U}$, $u \mapsto \exp(u)$ réalise un homéomorphisme de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{U}$.

3) Décomposition de Dunford et applications

Théorème : [GO]
Soit u trigonalisable. Alors, $\exists ! (d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que :

- d et n commutent
- d diagonalisable
- n nilpotent
- $u = d + n$.

Applications :

- Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, alors $\varphi^k \longrightarrow 0 \iff \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\lambda), |\lambda| < 1$.
- Si $\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ est de rayon de convergence $R > 0$,

Alors, si $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)$, $|\lambda| < R$, alors
$\sum_{k=0}^{n} a_n \varphi^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.
$\phi(\varphi)$ est un polynôme en φ.

- l'exponentielle est définie : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$
- Si $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)$, $|\lambda| < 1$, alors $I - \varphi$ est inversible et $(I - \varphi)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k$.
- si $e^A = e^B$ avec A et B diagonalisables, alors $A = B$.

III - Décomposition de Jordan.

1) Cas nilpotent [OA]

Blocs de Jordan :

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(k)$$

Prop :
$\exists B$ base de E tel que $\mathrm{mat}_B u = J_m$
$\iff$ u est nilpotent d'ordre n
$\iff$ u est nilpotent de rang

Théorème : **Développement.**
Soit $u \in \mathcal{N}$. Alors, $\exists m_1 \geq \cdots \geq m_p$ et B base de E tels que

$$\mathrm{mat}_B u \rightarrow \begin{pmatrix} J_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{m_p} \end{pmatrix} \quad \text{(réduite de Jordan de } u\text{)}$$

(les m_i sont uniques)
On associe à u la suite $(V_1(u), \ldots, V_n(u))$ où $V_i(u)$ est le nombre de blocs de taille i dans la réduite de Jordan de u.

Prop : u et $v \in \mathcal{N}$ sont semblables $\iff \forall i \in [\![1, n]\!]$, $V_i(u) = V_i(v)$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Remarques :

- ordre de nilpotence $= m_1$
- $\dim \mathrm{Ker}(u) = p = \sum_{j=1}^{n} V_j(u)$.

2) Cas trigonalisable

Définition : $J_{\lambda, m} = \lambda I_m + J_m \quad \left(= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} \right)$

Théorème : [OA]
Soit u trigonalisable. Alors, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in k^\ell$ et $\forall i \in [\![1, \ell]\!]$, $j_i \in \mathbb{N}$ et $m_{i,1} \geq \cdots \geq m_{i, j_i} > 0$ tels que $\exists B$ base de E,

$$\mathrm{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, m_{1,1}} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & J_{\lambda_1, m_{1, j_1}} & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & & J_{\lambda_\ell, m_{\ell, j_\ell}} \end{pmatrix}$$

Références:

- [GO] Gourdon, Algèbre.
- [X-ENS 2] Graux X-ENS Algèbre 2
- [OA] Objectif Agrégation.
- [FR] Fresnel
- [GR] Grifone
- [TAU] Tauvel

Autres développements possibles:

- Décomposition de Dunford.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle semblable à sa transposée ?
ssi elles ont les m valp et st semblable à la m matrice de Jordan

Jordan : démo par dualité, Récurrence sur la dimension.

- Appl de la trigonalisation :
  formule du rayon spectral : $\rho(A) = \lim_{n} \|A^n\|^{1/n}$
- preuve de Dunford par l'analyse complexe