133

ENDOMORPHISMES REMARQUABLES D'UN EV EUCLIDIEN

Cadre E espace vectoriel (e.v.) réel muni d'un produit scalaire noté $\langle\,,\rangle$, de norme associée $\|\ \|$. n est la dimension de E.

I. DEF° et PREMIÈRES PROP° [GOU] [GRIF]

①. Endomorphismes orthogonaux

Def° $f \in End(E)$ est orthogonal si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. ($f \in O(E)$)

Prop $f \in O(E) \iff \forall x,y \in E$, $\langle x,y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$
($f \in End(E)$) $\iff$ l'image de toute bon de E par f est une bon.
$\iff \forall b$ bon de E, $A = mat_b(f)$ est telle que ${}^tAA = Id$

Prop $f \in O(E) \Rightarrow f$ bijectif et $\det f = \pm 1$

Def $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tAA = Id$. ($A \in O_n(\mathbb{R})$)

Prop $(O(E), \circ)$ et $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$ sont deux groupes

Def $O^+(E) = \{f \in O(E), \det f = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal
$O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$

Prop ce sont deux sous groupes distingués de $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$

Ex $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in O_3^+(\mathbb{R})$.

② Endomorphismes adjoints

Def/Prop° Soit $f \in End(E)$. $\exists! f^* \in End(E)$ tel que $\forall x,y \in E$,
$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$. f^* est appelé adjoint de f.

si b bon de E, $A = Mat_b(f)$, alors $Mat_b(f^*) = {}^tA$

Prop $f^{**} = f$; $id^* = id$; $\det f^* = \det f$; $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

Prop F s.ev de E stable par $f \Rightarrow F^\perp$ stable par f^*

Ex: $f \in O(E) \Rightarrow f^* = f^{-1}$.

③ Endomorphismes symétriques

Def° • $f \in End(E)$ est symétrique (antisymétrique) si $f^* = f$. ($f^* = -f$)
On note $f \in S(E)$ ($f \in A(E)$)

• $M \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique (antisymétrique) si ${}^tM = M$ (${}^tM = -M$)
On note $M \in S_n(\mathbb{R})$ ($M \in A_n(\mathbb{R})$)

Prop° $f \in S(E) \iff \forall b$ bon de E, $Mat_b(f) \in S_n(\mathbb{R})$

Prop° Si $f \in S(E)$, ses valeurs propres sont toutes réelles.

Prop° : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, $\dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$

Def°. $f \in S(E)$ est (défini) positif si toutes ses valeurs propres sont (strictement) positives. On note $f \in S^{+(*)}(E)$
De même pour $M \in S_n(\mathbb{R})$, on note $M \in S_n^{+(*)}(\mathbb{R})$.

Ex si F sev de E, p la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est dans $S^+(E)$

④. Endomorphismes normaux

Def° $f \in End(E)$ est normal si $f \circ f^* = f^* \circ f$.
$M \in M_n(\mathbb{R})$ est normale si ${}^tMM = M\,{}^tM$.

Prop°: $f \in End(E)$ normal Alors $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$

Ex : les endomorphismes symétriques, orthogonaux et antisymétriques sont normaux.

II RÉDUCTION ET CONSÉQUENCES

① Endomorphismes normaux. [GOU]

Th. $f \in End(E)$ un endomorphisme normal. $\exists\, b$ bon de E dans laquelle $mat_b(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$
$\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ $\forall j$

Cor $M \in M_n(\mathbb{R})$ matrice normale. Alors $\exists\, P \in O_n(\mathbb{R})$, telque $P^{-1}MP = {}^tPMP$ ait la forme cidessus

② Endomorphismes symétriques

Th Soit $f \in S(E)$. $\exists$ b bon de E formée de vecteurs propres de f et ses valeurs propres sont réelles.

Cor Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^tPMP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{Applications}}$

Prop: $S_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $S_n^{++}(\mathbb{R})$ avec l'exponentielle

Th (Pseudo réduction simultanée) [GOU]. Soient $M \in S_n(\mathbb{R})$, $N \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. $\exists C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que
$${}^tCNC = I_d \quad {}^tCMC = D, \quad D \text{ diagonale réelle}$$

Appl: obtention de la signature d'une forme bilinéaire symétrique [GRIF]
classification euclidienne des coniques [AUD]
Ellipsoïde de John. [XENS]

Th $f \in S^+(E)$. $\exists!\ h \in S^+(E)$ tel que $u = h^2$, et h est un polynôme en u. [XENS]

Appl° Toute matrice dans $S_n^+(\mathbb{R})$ est une matrice de Gram. [GOU]

Thm décomposition polaire [GOU]
$\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $O \in O_n(\mathbb{R})$ / $M = OS$. [MT]
Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, la décomposition est unique.

Appl: $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes [Q]

Th: Réduction des antisymétriques. $M \in A_n(\mathbb{R})$. $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ [GOU] telle que $P^{-1}MP = {}^tPMP = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \tau_1 & \\ & & & \ddots \ \tau_s \end{pmatrix}$, $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix} \forall i$ $(\tau_i \in M_2(\mathbb{R}))$

③. Endomorphismes orthogonaux.

Th. $f \in O(E)$. $\exists$ b bon de E dans laquelle [GOU]

$\mathrm{mat}_b(f) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_r & & \\ & & & R(\theta_1) & \\ & & & & \ddots \ R(\theta_s) \end{pmatrix}$ Avec $\varepsilon_i = \pm 1$, $\theta_i \in \mathbb{R}$ et $\forall i$, $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

3

Appl: $\exp : A_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective [X-ENS]

III ÉTUDE DU GROUPE ORTHOGONAL

①. Propriétés topologiques

Prop^T $O_n(\mathbb{R})$ est compact [AUD]

Prop^T $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, et $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs [XENS]

Prop^T (homéomorphisme du à la décomposition polaire et à exp)
$$GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad [MT]$$

Prop^T L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est $\overline{B(0,1)}$ pour la norme matricielle subordonnée à $\|\ \|$. [ZQ]

②. Centres et générateurs [PER]

Déf°. $f \in GL(E)$ tel que $f^2 = Id$ est une symétrie.
Si $\dim \mathrm{Ker}(f - Id) = n-1$ (resp. $n-2$) f est une réflexion (resp. un renversement)

Prop° $f \in GL(E)$ tel que $f^2 = Id$ est dans $O(E)$ ssi $E = \mathrm{Ker}(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(f + Id)$

Prop°. F sev de E, σ_F symétrie dans $O(E)$ par rapport à F (ie $\sigma_F|_F = Id$)
Alors $\forall u \in O(E)$ $u\sigma_F u^{-1} = \sigma_{u(F)}$

Th $f \in O(E)$ s'écrit comme produit d'au plus r réflexions de O, $r = rg(f - Id)$ [XENS]

Th Si $n \geq 3$, $O^+(E)$ est engendré par les ~~réflexions~~ renversements.

Th le centre de $O(E)$ est $\{Id; -Id\} = Z$
Si $n \geq 3$, le centre de $O^+(E)$ est $Z \cap O^+(E)$, cad Id si n est pair, Z sinon.

③ Les dimensions 2 et 3

*Cas $n=2$: les angles [AUD]

Prop°. Le groupe $O_2^+(\mathbb{R})$ est isomorphe et homéomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 ($\mathbb{U}$)

Corollaire : $O_2^+(\mathbb{R})$ est commutatif

Corollaire : on retrouve le fait que $O_2^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

Prop° On a une application surjective $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \longrightarrow O_2^+(\mathbb{R})$, $\theta \longmapsto e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

qui induit un isomorphisme $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \simeq O_2^+(\mathbb{R})$.

L'image du réel θ s'appelle rotation d'angle θ.

Prop° Étant donnés deux vecteurs unitaires de E, $\exists !\, f \in O_2^+(E)$ qui envoie l'un sur l'autre.

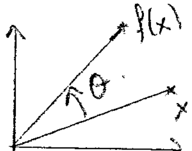
Prop°/Déf° Soit $\hat{\mathcal{A}}$ l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de E. On a une action de groupe : $\hat{\mathcal{A}} \times O_2^+(E) \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}$, $(u,v), f \longrightarrow (f(u), f(v))$

Les orbites sous cette action sont appelées les angles orientés de vecteurs. Cet ensemble est noté $\mathcal{A}$.

Prop° On a une bijection $\mathcal{A} \longmapsto O_2^+(E)$ qui permet de munir $\mathcal{A}$ d'une structure de groupe commutatif.

Rq : on définit aussi de la même manière les angles orientés de droites, de demi droites, et les angles non orientés (action de $O(E)$)

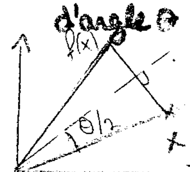
$\boxed{\text{Structure des éléments de } O_2(E)}$. [GRIF]



Prop° Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$

Si $A \in O_2^+(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$, A est rotation d'angle θ

Si $A \notin O_2^+(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$, et



A est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$

* Cas $n=3$ $\boxed{\text{Structure des éléments de } O(E)}$ [GRIF]

Prop° $f \in O_3(E)$

Si $f \in O_3^+(E)$ $\exists$ b. bon de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_b(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ f est une rotation

Si $f \in O_3^-(E)$, $\exists$ b bon de E dans laquelle

$\mathrm{Mat}_b(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (f réflexion) ou $\mathrm{Mat}_b(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ (f symétrie-rotation)

Exemple : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in O_3^+(\mathbb{R})$.

$\mathrm{Tr}\, A = 2\cos\theta + 1 \Rightarrow \theta = \pm \pi/3$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A - \mathrm{Id})$. Un calcul donne $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et donc A représente une rotation d'axe vect$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\pi/3$.

Prop° $O_3^+(E)$ est simple [X-ENS]

④ Lien avec les sous groupes de $GL(E)$ [X ENS]

Th (Maschke). G un sous groupe fini de $GL(E)$, et F un sous espace de E stable par tous les éléments de G. Alors F possède un sous espace stable par tous les éléments de G

Prop° Les sous groupes compacts de $GL(E)$ maximaux pour l'inclusion sont exactement les groupes $O(E)_q$ où E est muni du produit scalaire associé à une forme quadratique q.

Références

[GOU] : GOURDON, Algèbre / [PER] : PERRIN. Cours d'algèbre

[AUD] : AUDIN, Géométrie [Z-Q] : ZUILY-QUEFFELEC ...

[GRIF] : GRIFONE. Algèbre linéaire [Q] · QUEFFELEC - Topologie

[X-ENS] : FRANCINOU - GIANELLA - NICOLAS - Oraux X-Ens algèbre III

[M-T] : MNEIMNE - TESTARD - Groupes de Lie classiques