113 DETERMINANTS - EXEMPLES ET APPLICATIONS

notations : E espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathcal{B}$ une base de E : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$
$x_1, \dots, x_n$ famille de vecteurs de E ; $\forall i \in [\![1,n]\!]$, on pose $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j$

I. Définitions et premières propriétés : [Gou Al p 134]

1. Formes p-linéaires alternées

déf : Soient $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application
$$f : \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \longrightarrow F \\ (x_1, \dots, x_p) \longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{array}$$
est dite p-linéaire si en tout point, les p-applications partielles sont linéaires. Si $E_1 = E_2 = \dots = E_p = E$ et $F = \mathbb{K}$, on parle de formes p-linéaires sur E. L'ensemble des formes p-linéaires sur E est un espace vectoriel noté $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.

déf : Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$. f est dite alternée si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès qu'il existe $i \neq j \in [\![1,p]\!]$ tel que $x_i = x_j$.

2. Déterminant

th : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1. De plus, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée $\mathcal{B}$ de E, appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et notée $\det_{\mathcal{B}}$; et on a :
$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}, \text{ où } \varepsilon \text{ signature de } \sigma.$$

prop : changement de bases : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors
$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

th : $(x_1, \dots, x_n)$ forment une famille liée de E
$\Leftrightarrow$ Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$
$\Leftrightarrow$ Il existe une base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$

3. Déterminant d'un endomorphisme

déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ considérée : il est appelé déterminant de f et noté $\det f$.

prop : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det f \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$
En particulier, $\det(\mathrm{id}) = 1$.

4. Déterminant d'une matrice carrée

déf : Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et on le note
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1,n} & & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

prop : Si A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E, alors $\det f = \det A$.

5. Propriétés

prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \det B$
- Si A triangulaire, $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- $\det A = \det {}^T A$
- $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$, et si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

⚠ $\det(A + B) \neq \det A + \det B$. En général victor!

Remarque : Toutes ces définitions et propriétés restent vraies si l'on prend à la place du corps $\mathbb{K}$ un anneau commutatif A.
ex : soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme
$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Applications : . 2 matrices semblables ont même déterminant.
. $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ de caractéristique $\neq 2$).
. Une matrice est de rang $\leq r$ ($< n$) si et seulement si tous ses déterminants extraits de taille $r+1$ sont nuls.

prop : Continuité du déterminant
$$\det : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ M \longmapsto \det M \end{array} \quad \text{est continue.}$$

Applications : . $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$
. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathcal{R}(r) = \{M \in M_{n \times p}(\mathbb{K}), rg(M) \leq r\}$ est un fermé de $M_{n \times p}(\mathbb{K})$. [Objectif agreg p 157]

II. Méthodes de calcul [Gou Al p 136] [Monier]

1. Opérations sur les lignes ou les colonnes

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
prop : . $\det A$ dépend linéairement des lignes de A.
. Si on effectue une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sur les lignes de A, alors le déterminant est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$
. On ne change pas le déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire

des autres lignes.

<u>remarque</u>: Cette proposition reste valable en remplaçant ligne par colonne.

<u>exemples</u>. calcul de $d_1 = \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \cdots & a_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{vmatrix}$.

On fait $L_i \leftarrow L_i - L_1$.

Alors $d_1 = \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_2 - a_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n - a_1 \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=2}^{n} (a_i - a_{i-1})\right) a_1$

• calcul de $d_2 = \begin{vmatrix} & & a_n \\ & a_2 & \\ a_n & & \end{vmatrix}$. On effectue la permutation $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$$d_2 = \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i .$$

2. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{K})$.

<u>déf</u>: Pour chaque (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, on appelle mineur de la place (i,j) dans A le déterminant Δ_{ij} d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & & a_{i-1,n} \\ \cancel{a_{i,1}} & & \cancel{a_{i,j-1}} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{a_{i,j+1}} & & \cancel{a_{i,n}} \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

<u>déf</u>: Pour chaque (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, on appelle cofacteur de la place (i,j) dans A et on note A_{ij} le produit de $(-1)^{ij}$ par le mineur de la place (i,j) dans A.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} .$$

<u>prop</u>: développement de A par rapport à la i-ème ligne (résultat analogue sur les colonnes).

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

<u>exemples</u>: polynôme caractéristique des matrices de Frobenius: $A = \begin{bmatrix} 0 & & & a_1 \\ 1 & \ddots & & a_2 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_n \end{bmatrix}$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & & & a_1 \\ 1 & \ddots & & a_2 \\ & \ddots & -X & a_{n-1} \\ & & 1 & a_n - X \end{vmatrix} = (-1)^n \left(X^n - \sum_{i=1}^{n} a_i X^{i-1}\right)$$ en développant par rapport à la dernière colonne.

• déterminant de Vandermonde: $V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$

<u>remarque</u>: En pratique, un logiciel de calcul numérique calcule seulement les déterminants de matrices triangulaires. Le calcul du déterminant d'une matrice quelconque s'y ramène en opérant une décomposition de type LU.

3. Comatrice

<u>déf</u>: On appelle comatrice de $A (\in M_n(\mathbb{K}))$ la matrice carrée d'ordre n définie par:

$$\mathrm{Com}(A) = (A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$ où A_{ij} est le cofacteur de la place (i,j) dans A.

<u>prop</u>: $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $A\,{}^T\mathrm{Com}\,A = {}^T\mathrm{Com}\,A\,A = \det(A)\, I_n$.

<u>corollaire</u>: $\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^T\mathrm{Com}\,A$.

III. Domaines d'applications du déterminant:

1. En algèbre:

a) Résolution de systèmes linéaires par les formules de Cramer [Objectif agreg]

<u>prop</u>: Soit $U \in GL_n(\mathbb{K})$, $(U_1, \ldots, U_n)$ ses vecteurs colonnes, et $V \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le système linéaire $UX = V$ admet une unique solution $X = (x_i)$, donnée par:

$$x_i = \frac{\det(U_1, \ldots U_{i-1}, V, U_{i+1}, \ldots, U_n)}{\det U} \quad \forall i \in [\![1,n]\!].$$

b) Résultant de deux polynômes [Szpirglas p 564]

<u>déf</u>: Soit $P = \sum_{\ell=0}^{m} a_{m-\ell} X^\ell$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{n} b_{n-\ell} X^\ell$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ ($a_0 b_0 \neq 0$).

Leur résultant est défini par:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & b_n & & b_0 \\ a_m & & a_1 & & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & & \\ & & a_m & & & b_n \end{vmatrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{n \text{ colonnes}}\ \underbrace{\qquad}_{m \text{ colonnes}}$

<u>th</u>: Le pgcd de P et Q est de degré supérieur ou égal à 1 si et seulement si le résultant de P, Q est nul.

corollaire: Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, P et Q ont une racine commune si et seulement si leur résultant est nul.

<u>th</u>: Supposons qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ dans $\mathbb{K}$ tel que $P(X) = a_0 (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_m)$ et $Q(X) = b_0 (X - \beta_1) \ldots (X - \beta_n)$. On a alors:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (\alpha_i - \beta_j) = a_0^n \prod_{i=1}^{m} Q(\alpha_i) = (-1)^{mn} \mathrm{Res}(Q,P).$$

D V pd T <u>théorème de Kronecker</u>. Soit P_1 un polynôme qui vérifie la propriété $\mathcal{H}_n$: P_1 est unitaire de degré n, à coefficients entiers: $P_1(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_n \neq 0$, et les racines de P_1 dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou égal à 1. Alors les racines de P_1 sont des racines de l'unité.

2. En géométrie

a) Orientation : [Audin p 69]

déf : Soit B et B' deux bases de E. On dit qu'elles sont équivalentes si $\det_B B' > 0$. Cette relation d'équivalence définit deux classes d'équivalences. Orienter l'espace E, c'est choisir une de ces deux classes. Les bases de la classe choisie sont alors dites directes.

b) Produit mixte : [Tauvel p 407]

déf : Soit E un espace vectoriel euclidien (de dimension n) orienté. Pour $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, on appelle produit mixte de $x_1,\dots,x_n$ et on note $[x_1,\dots,x_n]$ le scalaire $\det_B(x_1,\dots,x_n)$ où B est une base orthonormale directe.

c) Distance à un sous-espace vectoriel et matrice de Gram : [GouAl p.263]

déf : Soit E un espace préhilbertien et $x_1,\dots x_n$ n vecteurs de E. On appelle matrice de Gram de $x_1,\dots,x_n$ la matrice $[\langle x_i, x_j\rangle]_{1\le i,j\le n}$ et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice, noté $G(x_1,\dots,x_n)$.

th : Soit E un espace préhilbertien et V un sous-espace de E muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$. Soit $x \in E$. Alors la distance d de x à V ($d = \inf_{y\in V} \|x-y\|$) vérifie $d^2 = \dfrac{G(e_1,\dots,e_n,x)}{G(e_1,\dots,e_n)}$.

d) Volume : [Objectif agreg p 183]

th : Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable. Alors : $\mu(u(X)) = |\det u|\,\mu(X)$.

application : volume d'un parallélépipède :
Soit $v_1,\dots,v_n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et $P(v_1,\dots,v_n)$ le parallélépipède engendré par $v_1,\dots,v_n$.

$$\mu(P(v_1,\dots,v_n)) = |\det(v_1,\dots,v_n)|.$$

prop : inégalité de Hadamard :
Soit $\|.\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$, et $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$.
$\mu(P(v_1,\dots,v_n)) = |\det(v_1,\dots,v_n)| \le \|v_1\|\dots\|v_n\|$, avec égalité si et seulement si les v_i forment une famille orthogonale.

exemple : ellipsoïde de John-Loewner [Alessandri p 162]

th : Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. Il existe un unique ellipsoïde de volume minimum contenant K.

corollaire : Tout sous-groupe compact G de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal.

D
V
P
T

3. En analyse

a) Jacobien [Methodix An. p 205]

déf : Soit f une application différentiable. Le jacobien est le déterminant de la matrice des dérivées partielles de f :

$$J(a) = \det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{1\le i,j\le n}$$

application : théorème d'inversion globale : Soit f une application telle que :
- f est injective sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (à valeur dans $\mathbb{R}^n$).
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur Ω si et seulement si le jacobien de f ne s'annule pas sur Ω.

b) Changement de variables dans une intégrale [Objectif agreg p 9]

th : Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application injective et différentiable sur $\mathcal{U}$. Alors $V = \varphi(\mathcal{U})$ est mesurable, et une fonction $f \in L^1(V)$ si et seulement si $|\det d\varphi|\, f\circ\varphi \in L^1(\mathcal{U})$. Dans ce cas,

$$\int_V f(x)\,dx = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(y))\, \det d\varphi(y)\, dy.$$

c) Wronskien [Methodix An p. 245]

déf : Soit $\frac{dX}{dt} = A(t)X$ une équation différentielle linéaire ($A(t) \in \mathcal{L}(E)$), et soit $y_1,\dots,y_n$ n solutions. Le Wronskien de ces solutions est :

$$W_{y_1,\dots,y_n} : t \mapsto \det(y_1(t),\dots,y_n(t))$$

prop : $(y_1,\dots,y_n)$ est une base de solution $\Leftrightarrow \forall t,\ W_{y_1,\dots,y_n}(t) \neq 0$
$\Leftrightarrow \exists a,\ W_{y_1,\dots,y_n}(a) \neq 0$.

Références :

- Gourdon Algèbre
- Objectif agreg
- Monnier, Algèbre MPSI
- Tauvel, Algèbre
- Szpirglas, Mathématiques Algèbre L3
- Methodix analyse
- Alessandri thème de géométrie
- Audin géométrie