APPLICATION DES N COMPLEXES A LA GÉOMÉTRIE

I) Géométrie plane. 1) Écriture trigonométrique.

On identifie le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$: $\tau : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$
$(x, y) \longmapsto x + iy$

On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Th. : L'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$
$t \longmapsto e^{it}$
est un morphisme de groupes surjectif.

Déf. : On définit π par $\mathrm{Ker}(\varphi) = \underset{>0}{2\pi}\mathbb{Z}$.

On définit $\mathcal{A}_1$ l'ensemble des couples de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence

$(u, v)\, \mathcal{R}\, (u', v') \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f \text{ rotation de } \mathbb{R}^2 \\ f(u) = u',\ f(v) = v'. \end{cases}$

Prop. : L'application $\Phi_1 : \mathcal{A}_1 \longrightarrow O^+(\mathbb{R}^2)$ qui à (u, u') associe l'unique isométrie positive envoyant u sur u' se factorise en :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_1 : \mathcal{A}_1 & \longrightarrow & O^+(\mathbb{R}^2) \\ \downarrow & \nearrow_{\Phi} & \\ \mathcal{A} = \mathcal{A}_1/\mathcal{R} & & \end{array}$$

et Φ est bijective.
$\mathcal{A}$ est l'ensemble des angles orientés de vecteurs.

Défi angle + à être plus général

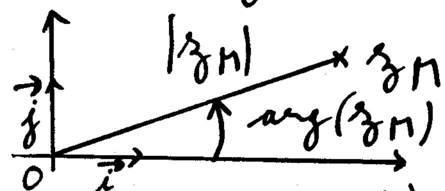
Déf. : Pour $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$; que : $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$. On l'appelle argument de z

Prop. : $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow SO_2(\mathbb{R})$
$e^{i\theta} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} := R_\theta$

est un homéomorphisme. On a une correspondance entre R_θ et l'argument d'un complexe.

2) Interprétation géométrique :

L'affixe z_M d'un point M est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec $z = \tau(\overrightarrow{OM})$.



(on notera z_M ou $z_{\overrightarrow{OM}}$)

Produit scalaire : $(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Re}(z_{\vec{u}}\, \overline{z_{\vec{v}}})$.

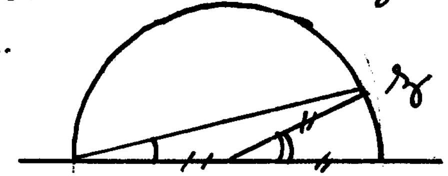
Triangle équilatéral : ABC équilatéral $\Leftrightarrow$
$(z_A - z_B)^2 + (z_B - z_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = 0$.

Polygone régulier : Les racines n-ième de l'unité forment les sommets d'un n-gone régulier

Cercle : $\mathcal{C}(A, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_A| = r\}$

Droite : $\mathcal{D}(\vec{u}, A) = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}[(z - z_A)\overline{z_{\vec{u}}}] = 0\}$

Application : Théorème de l'angle au centre.



3) Transformations du plan.

Déf. : Une inversion de puissance k et de pôle P associe M' à M avec P, M, M' alignés et $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM'}) = k$.

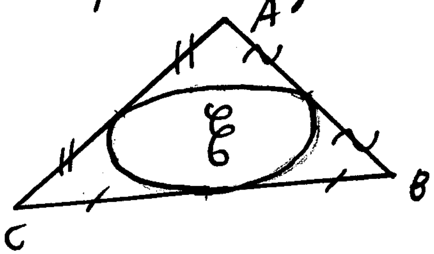
T	$T_\tau = \tau^{-1} \circ T \circ \tau$
Translation : $\vec{u}$	$z \mapsto z + z_{\vec{u}}$
Rotation : A, θ	$z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$
Homothétie : A, k	$z \mapsto z_A + k(z - z_A)$
Symétrie $\perp$ (AB)	$z \mapsto \frac{z_A - z_B}{\bar{z}_A - \bar{z}_B}\bar{z} - \frac{z_A\bar{z}_B - z_B\bar{z}_A}{\bar{z}_A - \bar{z}_B}$
Inversion : P, k	$z \mapsto \frac{z_P\bar{z} + k - z_P\bar{z}_P}{\bar{z} - \bar{z}_P}$
Similitude directe	$z \mapsto az + b$
Similitude indirecte	$z \mapsto a\bar{z} + b$

4) Applications :

(i) Théorème des 3 carrés, de Napoléon.

(ii) Th. : Ellipse de Steiner. $\boxed{\text{DVPT}}$

Soient A, B, C trois points distincts. Il existe une unique ellipse $\mathcal{E}$ tangente aux côtés de ABC.



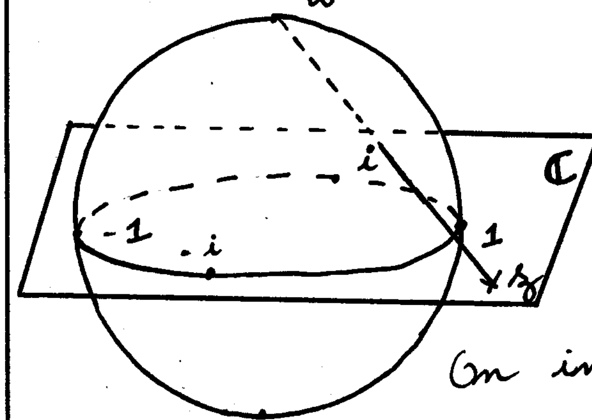
Les foyers de l'ellipse sont les racines de P' avec $P(X) = (X - z_A)(X - z_B)(X - z_C)$.

II) Géométrie projective, homographies.

1) Droite projective complexe, sphère de Riemann

Prop - Déf. On définit sur $\mathbb{C}^*$ la relation d'équivalence $x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, x = \lambda y$

$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \sim$ est la droite projective complexe.



$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ s'identifie, via la projection stéréographique, à la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ compactifié de $\mathbb{C}$ par un point.

On introduit une topologie de $\hat{\mathbb{C}}$.

Les voisinages de $z_0 \neq \infty$ sont les voisinages de $\mathbb{C}$, les voisinages de ∞, les $K^c \cup \{\infty\}$ avec $K \subset\subset \mathbb{C}$.

2) Homographies.

Déf. : $h : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est une homographie si il existe $f \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \uparrow\downarrow & & \downarrow\uparrow \\ h : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \end{array}$$

commute

Prop. : L'ensemble $PGL_2(\mathbb{C})$ des homographies est isomorphe à $GL_2(\mathbb{C}) / \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ via l'isomorphisme de groupes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \\ -\frac{d}{c} \mapsto \infty \\ \infty \mapsto \frac{a}{c} \end{cases}$

~~Application~~ : Action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$. $\boxed{\text{DVPT}}$

Prop. : Les homographies conservent les angles orientés.

3) Birapport.

Déf. : Birapport de A, B, C, D : $f(z_D)$ où $A \longrightarrow \infty$, $B \longrightarrow 0$, $C \longrightarrow 1$ par homographie.

Application : Thm. de Ptolémée : A, B, C, D sont alignés ou cocyclique $\Leftrightarrow [A, B, C, D] \in \mathbb{R}_-$.

Prop. : Les homographies conservent le birapport. De plus, si $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$ $\begin{cases} \text{points distincts} \\ h(A) = A' \\ h(B) = B' \ldots \end{cases}$ il existe une unique homographie telle que

Corollaire : $\{$cercles, droites$\}$ est stable par homographies.

III) Fonctions holomorphes.

Déf. : Si $A(z) = \frac{z}{|z|}$ pour $z \neq 0$, une fonction de la variable complexe ... les angles ssi : (i) $f(z) \neq f(z_0)$ sur un voisinage de z_0

(ii) $\lim\limits_{r \to 0} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)]e^{-i\theta}$ existe et ne dépend pas de θ.

On dit que f est conforme en z_0.

Th. : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. Supposons que la différentielle de f est inversible en z_0.

f conforme en $z_0 \Leftrightarrow f$ holomorphe en z_0

Rq. : On retrouve la conservation d'angles par homographie.

Déf. : Soit Ω un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si f est holomorphe au vois. de z_0

(i) $\forall z_0 \neq \infty$, $f(z_0) \neq \infty$ ——————

(ii) $\forall z_0 \neq \infty$, $f(z_0) = \infty$ $\quad \frac{1}{f}$ —————— 0

(iii) si $\infty \in \Omega$, $f(\infty) \neq \infty$ $\quad z \mapsto f(\frac{1}{z})$ —————— 0

(iv) si $\infty \in \Omega$, $f(\infty) = \infty$ $\quad z \mapsto \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ ——————

Déf. : Soit Ω, Ω' deux ouverts de $\hat{\mathbb{C}}$. f est un isomorphisme si f est bijective et que f et f^{-1} sont holomorphes.

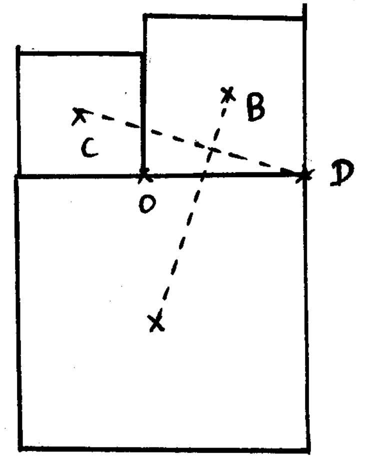
Ω et Ω' sont dit isomorphes.

Th. : (i) Les automorphismes du disque unité sont les : $\varphi_\alpha : z \longmapsto \lambda \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$ $\alpha \in \mathbb{D}$, $\lambda \in \mathbb{U}$.

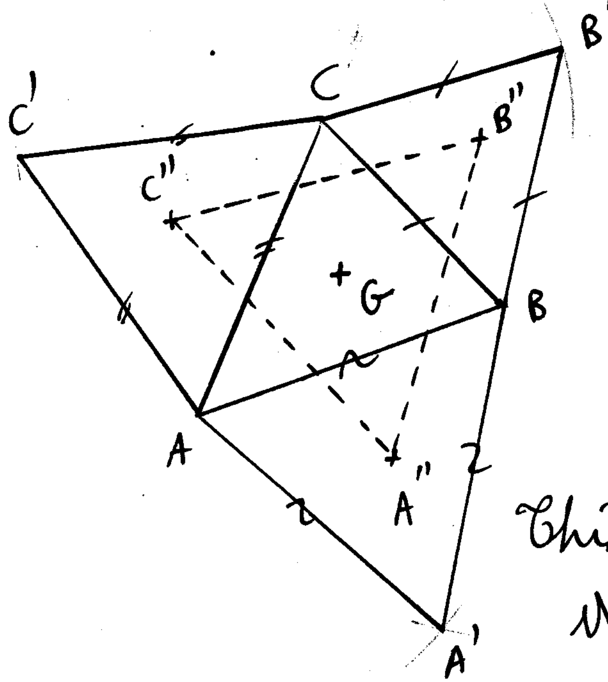
(ii) Les automorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$ sont les homographies.

On peut joindre groupe circulaire

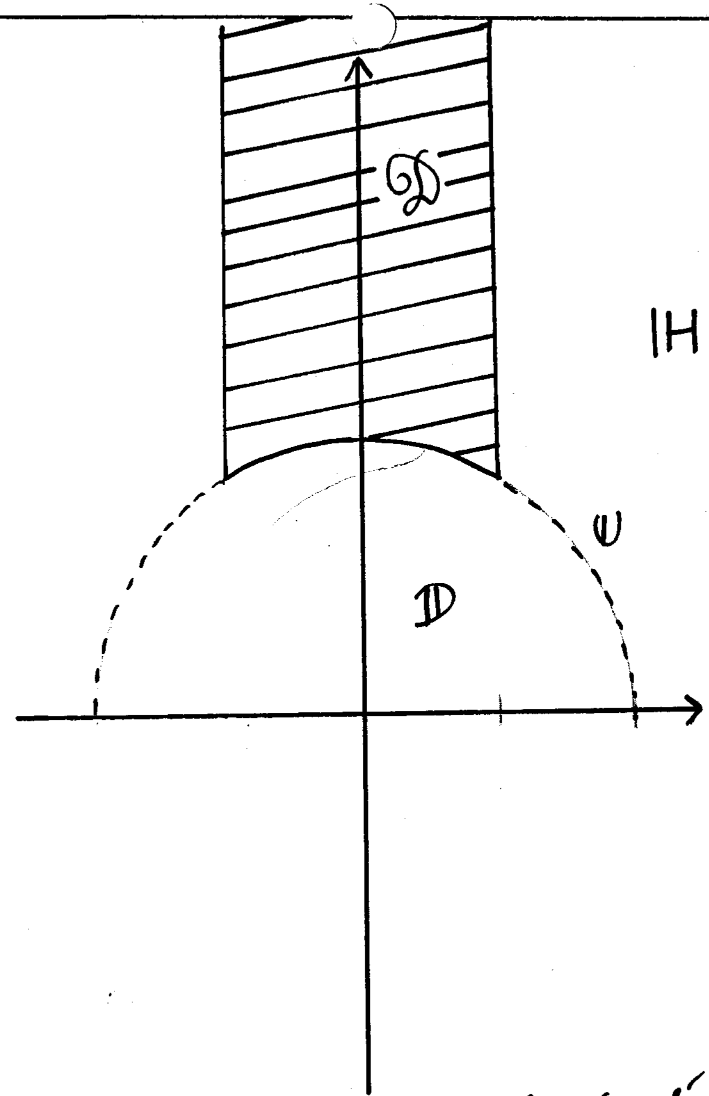
Napoléon



Théorème des 3 carrés.



Théorème de Napoléon.



Domaine fondamental de l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$.

RÉFÉRENCES:

Audin

Gramain

Avez

Rudin