136 : **Coniques - Applications**

On se place dans toute la leçon dans un plan affine euclidien E.

I. Etude analytique

Déf : Une conique est définie comme un polynôme du second degré à 2 variables, à un coefficient non nul près. [LA]

Ex : $C(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x + 4y + 5$

Déf : On appelle l'image d'une conique affine réelle l'ensemble $\{M \in E,\ \varphi(\overrightarrow{PM}) + 2g(\overrightarrow{PM}) + c = 0\}$, avec $P \in E$, $c \in \mathbb{R}$, g est une forme linéaire, et φ une forme quadratique sur E. [LA]

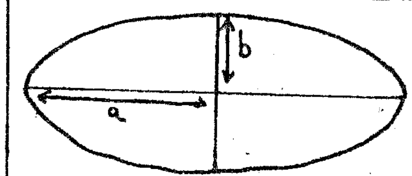
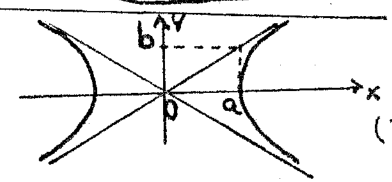
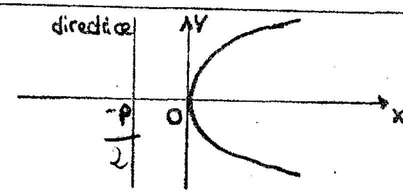
Rem : · C est une conique $\Leftrightarrow$ L'image de C a pour équation $C(x,y) = 0$. En pratique, on confond souvent les deux définitions.
· Pour une conique donnée, φ, g, c et P ne sont pas uniques. [LA]

Déf : Si $C(x,y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}$, est une conique, alors $Q_C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{13} \\ b_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_{13} & b_{23} \end{matrix} & b_{33} \end{pmatrix}$ est la forme quadratique propre associée à C. $\tilde{Q}$

Rem : $C(x,y) = (x, y, 1)\, Q_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

Prop : Toute conique admet une équation réduite de la forme $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. [LA][AV]
ou $Y^2 = \alpha X$

App : Classification métrique des coniques. les penser en terme d'action de groupe (orbites)

Equation cartésienne	Conique	Dessin	
$Y^2 = R$, $R<0$	Vide	$\emptyset$ Isométrie x conique	(1)
$aX^2 + bY^2 = 0$, $ab>0$	Point	·	(2)
$aY^2 = 0$, $a \neq 0$	Droite		(3)
$X^2 = a$, $a>0$	2 droites parallèles		(4)
$aX^2 - bY^2 = 0$, $ab>0$	2 droites sécantes		(5)
$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = a$, $a<0$, $\lambda_i > 0$	Vide	$\emptyset$	(6)
$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$	Ellipse		(7)
$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$	Hyperbole		(8)
$Y^2 = 2pX$	Parabole		(9)

Déf : · Les coniques (2), (3), (4) et (5) sont dites dégénérées, ou décomposées.
· Les coniques (7), (8) et (9) sont dites propres. [AV].

Thm : Une conique est dégénérée ssi sa forme quadratique propre associée est dégénérée. [AV].

Thm : Si C est une conique propre telle que $C(x,y) = (x,y)\tilde{Q}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P(x,y) + c = 0$
alors · C est une ellipse $\Leftrightarrow \det \tilde{Q} > 0$
· C est une parabole $\Leftrightarrow \det \tilde{Q} = 0$
· C est une hyperbole $\Leftrightarrow \det \tilde{Q} < 0$ [AV]

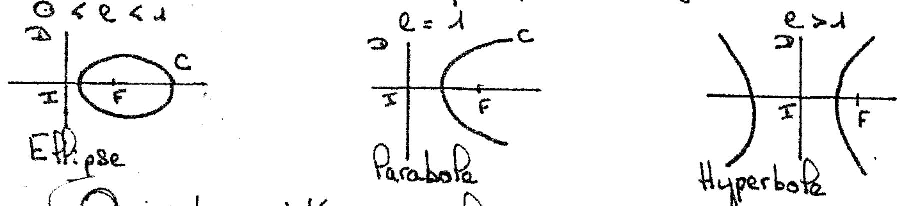
II - Etude géométrique

a) Définition monofocale des coniques propres

<u>Déf:</u> Soient $F \in E$, $\mathcal{D}$ une droite de E telle que $F \notin \mathcal{D}$, $e \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle conique propre de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ (associée) et d'excentricité e, la partie C de E définie par $C = \{ M \in E, MF = e MH \}$, où H est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$. [MO]

<u>Rem:</u> · Dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$, où I est la projection orthogonale de F sur $\mathcal{D}$, $\vec{i}$ le vecteur directeur unitaire de (IF), et $\vec{j}$ celui de (IH), on a : $M \in C \Leftrightarrow (1-e^2)x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0$, avec $d = IF$. [MO]

· La classification métrique des coniques nous donne directement une classification des coniques propres en fonction de l'excentricité:



· On peut considérer que le cas $e = 0$ dans l'équation correspond au cercle. → non ! c'est $\{F\}$?! avec la déf [MO]

<u>Prop - Déf:</u> L'ellipse et l'hyperbole possèdent deux axes de symétrie orthogonaux, et un centre de symétrie, intersection de ces deux axes. Ces deux coniques sont des coniques à centre. [LA]

<u>Déf:</u> On appelle paramètre de la conique le nombre $p = eh$, où e est l'excentricité de la conique, et h la distance du foyer à la directrice. [LA]

b) Définition bifocale des coniques à centre

<u>Prop:</u> Soient $F, F' \in E$ distincts, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
· L'ensemble $\{ M \in E, MF + MF' = 2a \}$ est une ellipse de foyers F et F' (si $a > \frac{1}{2} FF'$)
· L'ensemble $\{ M \in E, |MF - MF'| = 2a \}$ est une hyperbole de foyers F et F' (si $a < \frac{1}{2} FF'$) [MO]

<u>Déf:</u> · Dans le cas de l'ellipse, a est le demi-grand axe.
· Dans le cas de l'hyperbole, $2a$ est l'axe focal. [MO]

<u>Prop:</u> · L'ellipse $C = \{(x,y) \in E^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ admet la représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

· L'hyperbole $C = \{(x,y) \in E^2, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ admet la représentation paramétrique $\begin{cases} x = \varepsilon a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$, $(\varepsilon, t) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$. [MO]

c) Etude en coordonnées polaires d'une conique ayant son foyer en l'origine

<u>Prop:</u> La conique C de foyer O, de directrice $\mathcal{D}$, d'excentricité e, admet l'équation polaire : $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta - \varphi)}$ avec $\begin{cases} d = d(O, \mathcal{D}) \\ p = de \\ \varphi = (\widehat{\vec{i}, \mathcal{D}}) + \frac{\pi}{2} [\pi] \end{cases}$ [MO]

<u>Rem:</u> Si $\vec{i} \perp \mathcal{D}$, alors $\varphi = 0$

<u>App:</u> <u>Lois de Kepler</u>

<u>1ère loi:</u> Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.

<u>2ème loi:</u> Le segment Soleil-Planète balaye des aires égales en des temps égaux.

<u>3ème loi:</u> Le quotient du carré de la période de révolution sur le cube du demi-grand axe de l'ellipse est indépendant de la planète. [LA]

d) Définition historique

<u>Théorème belge:</u> Toute conique s'obtient comme section plane [GR]

III - Tangente à une conique → si droit y'ère

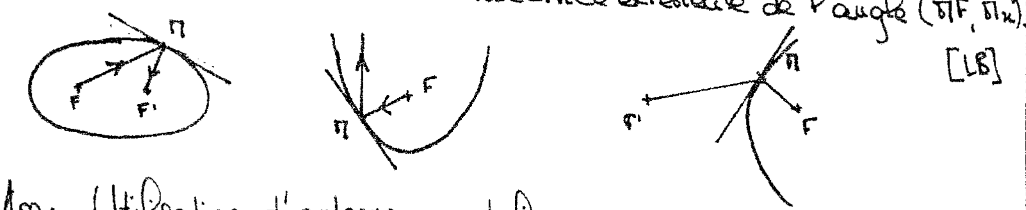
Prop: Une conique propre est l'ensemble des centres des cercles passant par un point donné F, et qui sont tangents à un cercle $\mathcal{C}$ ou une droite Δ donnés, $\mathcal{C}$ et Δ ne contenant pas F. [LA]

le centre du cercle c'est le 2e foyer

Rem: · Pour l'ellipse, F est à l'intérieur de $\mathcal{C}$.
· Pour l'hyperbole, F est à l'extérieur de $\mathcal{C}$.
· Pour la parabole, on considère une droite Δ. [LA].

Thm: Soient C une conique de foyer F et de cercle directeur $\mathcal{C}$, $\Pi \in C$, φ le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle de centre Π passant par F. Alors la conique C admet une tangente en Π, médiatrice du segment $[F\varphi]$. [LB].

Cor: · Soit une conique à centre de foyers F et F', alors la tangente en un point Π de la conique est bissectrice de $(\vec{\Pi F}, \vec{\Pi F'})$.
· Soit une parabole de foyer F, d'axe Fx, la tangente en un point Π de la parabole est bissectrice extérieure de l'angle $(\vec{\Pi F}, \vec{\Pi x})$. [LB]



App: Utilisation d'antennes paraboliques.

Petit théorème de Poncelet: Soit C une conique à centre définie par 2 foyers F, F' et un cercle directeur $\mathcal{C}$. Soit Π un point hors de $\mathcal{C}$, et T_1, T_2 les deux points d'intersections des tangentes à la conique issues de Π. Alors $(\vec{\Pi T_1}, \vec{\Pi F})$ et $(\vec{\Pi F'}, \vec{\Pi T_2})$ sont égaux.

App: Ellipse de Steiner

Soient Π_1, Π_2, Π_3 trois points non alignés de E, d'affixe z_1, z_2, z_3.
Soit $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$.
Alors les racines de P' sont les foyers d'une ellipse tangente aux trois côtés du triangle $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ en leur milieu.

IV - L'ellipse

Prop: · Pour qu'une droite soit tangente à une ellipse, il faut et il suffit que le symétrique d'un foyer par rapport à cette droite appartienne au cercle directeur relatif à l'autre foyer.
· Pour qu'une droite soit tangente à une ellipse, il faut et il suffit que le produit algébrique des distances des foyers à cette droite soit égal au carré du demi-petit axe de l'ellipse. [LH]

Prop: L'image d'un cercle par une affinité orthogonale est une ellipse. Cette affinité a pour axe le grand axe de l'ellipse, et est de rapport $\frac{b}{a}$. Le cercle est appelé cercle principal. [ΠΟ]

App: L'aire d'une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b est égale à πab. [LA]

App: Théorème d'Apollonius

1) La somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des demi-axes.

2) L'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est constante et égale à l'air du rectangle construit sur les demi-axes. [LH]

Rem: Deux diamètres d'une ellipse sont conjugués s'ils sont l'image de deux diamètres conjugués du cercle principal de l'ellipse par l'affinité orthogonale d'axe le grand axe de l'ellipse et de rapport $\frac{b}{a}$.

Références:

[LA] G. Lavitte, Géométrie pour le CAPES et l'agrégation
[ΠΟ] J-Π Monier, Géométrie
[AU] A. Auez, La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation
[LH] C. Lebossé et C. Hémery, Géométrie
[LB] D. Lehmann et R. Bkouche, Initiation à la géométrie
[GR] A. Gramain, Géométrie élémentaire → pr ies déf