CONIQUES. APPLICATIONS.

I/ Coniques euclidiennes :

Cadre : $\mathcal{A}$ un plan affine euclidien.

Déf : on appelle conique ordinaire l'ensemble des centres des cercles Γ, passant par un point fixe F, et tangents soit à une droite D ne contenant pas F, soit à un cercle C ne contenant pas F.

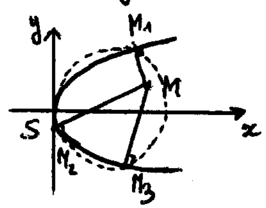
I. 1°) Les paraboles :

Déf : On appelle parabole P de foyer F et de directrice la droite D, l'ensemble des centres des cercles Γ passant par F, tangents à D $(F \notin D)$.

Construction point par point : soit Δ droite perpendiculaire à D, en H.
Alors $M \in \Delta$ appartient à P $\Leftrightarrow$ M est sur la médiatrice de FH et sur Δ.
↳ Figure 1.

Équation cartésienne : soit le repère orthonormé $\mathcal{R} = (S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\vec{\imath} = \vec{SF}/\|\vec{SF}\|$. Alors $\begin{cases} F : (\frac{1}{2}, 0) \\ D : x = -1/2 \end{cases}$ et $P = \{M(x,y) \,/\, y^2 = 2px\}$

Appl : Soit $M \in E$. Soit M_1, M_2, M_3 les pieds des normales menées de M à P.
Alors S, M_1, N_2, M_3 sont cocycliques.



Thm : (lien avec la définition par foyer et directrice) :
La parabole P de foyer F, de directrice D est l'ensemble des points M tq $\dfrac{MF}{d(M,D)} = 1$ $(F \notin D)$.

I. 2°) Les ellipses :

Déf : Soit C' un cercle de centre F' et F, distinct de F', intérieur à C'. On appelle ellipse E de foyers F et F' l'ensemble des centres des cercles Γ passant par F et tangents à C'.

Notation : $\|\vec{FF'}\| = 2c$ et rayon de $C' = 2a$. (donc $0 < c < a$).

Construction point par point : soit φ sur C'. Alors M est l'intersection de $(F'\varphi)$ et de la médiatrice de $[F\varphi]$. ↳ Figure 2.

Thm : L'ellipse E, de foyers F et F', de cercle directeur C' de rayon 2a et de centre F' est $\{M \,/\, MF + MF' = 2a\}$.

Équation cartésienne : soit le repère orthonormé $\tilde{\mathcal{R}} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O est le milieu de [FF'], $\vec{\imath} = \vec{F'F}/\|\vec{F'F}\|$.
Alors $F : (c, 0)$ et $E = \{M(x,y) \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ où $b > 0$ tq $b^2 = a^2 - c^2$.

Csqs : Une ellipse admet deux axes de symétrie orthogonale, perpendiculaires entre eux, d'où un centre de symétrie.

Thm : Soit Δ une droite, $F \notin \Delta$. Une ellipse est l'ensemble des points M tq $\dfrac{MF}{d(M,\Delta)} = \text{cste} < 1$. On note e cette constante, appelée excentricité de l'ellipse.
En notant $\Delta : x = d$, cela équivaut à l'équation : $\dfrac{\left[x + \frac{de^2}{1-e^2}\right]^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} + \dfrac{y^2}{\frac{e^2d^2}{1-e^2}} = 1$.

Propriétés tangentielles :

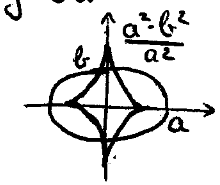
- La tangente en un point M de E est la bissectrice extérieure de ((MF), (MF'))
  ↳ Figure 3.
- 1er thm de Poncelet : soit P le point d'intersection de deux tangentes en M et M'. Alors (FP) est bissectrice de ((FM), (FM'))
- 2ème thm de Poncelet : sous les mêmes hypothèses, on a égalité des 2 angles ((PM'), (PF')) et ((PM), (PF))

↳ Figure 4.

Appl : thm soit M_1, M_2, M_3 trois points non alignés dans le plan de la variable complexe, d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.
Soit $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$.
Alors les racines du polynôme P' sont les foyers d'une ellipse tangente aux 3 côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leur milieu.

Une ellipse admet une représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$;

Appl : La développée de l'ellipse admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^3 t \\ y = -\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^3 t \end{cases}$



I. 3°) Les hyperboles :

Def : Soit C' un cercle de centre F' et F extérieur à C'. On appelle hyperbole H de foyers F et F', l'ensemble des centres M des cercles Γ tangents à C' et passant par F.

Thm : Une hyperbole H de foyers F et F' est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$.

Équation cartésienne : on reprend le repère $\tilde{R}$. Alors H est caractérisée par l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Csqs : Une hyperbole H admet deux axes de symétrie orthogonale, d'où un centre de symétrie.

Thm : Soit Δ une droite, $F \notin \Delta$, $e > 1$. Alors une hyperbole est caractérisée comme $\{M \,/\, \frac{FM}{d(M,\Delta)} = e\}$.

↳ grâce à l'excentricité, on a pu classer les 3 types de coniques.

I. 4°) En polaires :

Thm : On a les équations : $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ pour l'ellipse et la parabole (on retire $\theta = \pi$) où la directrice est d'équation $x = d$.

$r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ pour l'hyperbole de foyer l'origine, de directrice $\Delta : x = d$

et où les 2 branches de l'hyperbole correspondent aux valeurs <0 ou >0 de r.

Appl. : Problème à deux corps en Physique.

I. 5°) Pourquoi coniques ?

On p. voir les coniques comme les sections d'un cône de révolution et d'un plan.

II / Coniques affines :

Cadre : P_R plan affine réel.

II. 1°) Définitions :

* On appelle conique affine $\mathcal{C}$ la classe d'équivalence d'un polynôme de degré (exactement) 2 via la relation

$$(f \sim g) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \,/\, f = \lambda g)$$

ie. l'équation cartésienne : $\underbrace{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f}_{f(x,y)} = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

qui peut également s'écrire : $\mathcal{E}(x,y) + \lambda(x,y) + \alpha = 0$, où $\mathcal{E}$: forme quadratique, λ : forme linéaire, α : scalaire.

* On appelle matrice de la conique affine $\mathcal{C}$, notée M, la matrice associée à la forme quadratique homogénéisée q de $\mathcal{C}$, ie. $\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$

* $\mathcal{C}$ est dite propre si M inversible (ie. q non dégénérée).

* L'image de la conique est $\{M \in P_R \,/\, f(x,y) = 0\}$.

Rmq : cette vision n'est pas appropriée pour la classification des coniques : $x^2+y^2+1=0$ et $x^2+1=0$ définissent toutes les deux l'ensemble vide, mais leur forme quadratique ne sont pas équivalentes.

II. 2°) Classification affine :

Thm (équations réduites des coniques affines)

Dans un repère adéquat, l'équation d'une conique du plan affine réel est de l'une des neufs formes classées dans le tableau suivant, où elles sont regroupées par type (en fonction du signe du déterminant de la matrice 2x2 associée à $\mathcal{E}$).

Rmq : On pourrait donner une classification topologique des coniques affines : par exemple, les ellipses sont les coniques propres compactes, les paraboles ——— connexes non compactes

Equation algébrique réduite	Image géométrique de la conique	Rang(M)	Signature de ξ et dét	Type
$X^2+Y^2+1=0$	$\emptyset$	3	$(2,0)$ $ac-b^2>0$	Elliptique
$X^2+Y^2-1=0$	Cercle	3		
$X^2+Y^2=0$	point	2		
$X^2-Y^2-1=0$	Hyperbole	3	$(1,1)$ $ac-b^2<0$	Hyperbolique
$X^2-Y^2=0$	Droites sécantes	2		
$X^2-Y=0$	Parabole	3	$(1,0)$ $ac-b^2=0$ (ξ dégénérée)	Parabolique
$X^2-1=0$	Droites parallèles	2		
$X^2+1=0$	$\emptyset$	2		
$X^2=0$	Droite double	1		

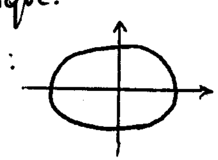
Ex : $f(x,y)=x^2-2xy+y^2+2x-3y+3=0$

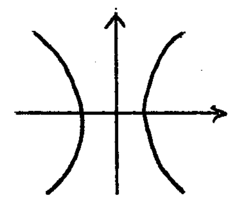
- $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2 \longrightarrow$ type parabolique
- $\begin{cases} X=x-y \\ Y=y \end{cases}$ puis $\begin{cases} X'=X+1 \\ Y'=Y-2 \end{cases}$ donnent $X'^2-Y'=0 \to$ parabole

II.3°) Application de la définition par (ξ,λ,α) : coniques à centres.

Déf : Lorsqu'il existe un seul et unique point tel que la conique est invariante par symétrie centrale par rapport à ce point, on appelle ce dernier le centre de la conique.

Les 2 coniques non dégénérées à centre : l'ellipse et l'hyperbole.





Pté : Pour trouver le centre Ω, il suffit de résoudre le système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ où $\Omega(x_0,y_0)$.

Ex : $x^2+2xy-y^2-4x=0$

Alors $\begin{cases} 2x_0+2y_0=4 \\ -2y_0+2x_0=0 \end{cases}$ qui équivaut à $\Omega(1,1)$.

Références :

I - [Gostiaux], cours de mathématiques spéciales, t5.
Pour les applications : [Ladegaillerie], Géométrie (CAPES, Agreg)
[Monier], Géométrie sup, spé.

II - [Ladegaillerie], le même.
[Audin], Géométrie $\longrightarrow$ pour les coniques à centre et la vision topologique de la classification.

Développements :

- Racines de P', pour P de degré 3.
- Section d'un plan et d'un cône (§ I.5)

ANNEXE :

Figure 1

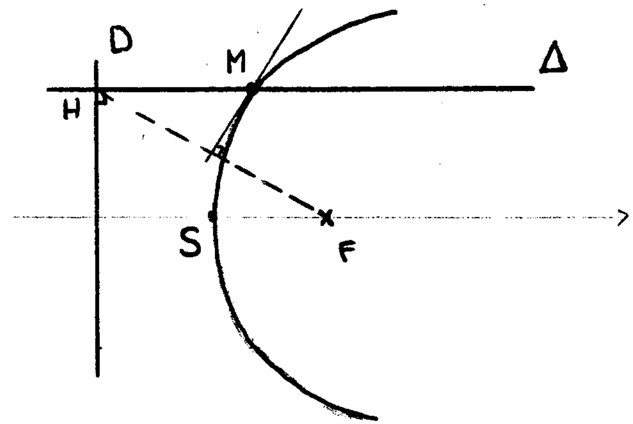


Figure 2

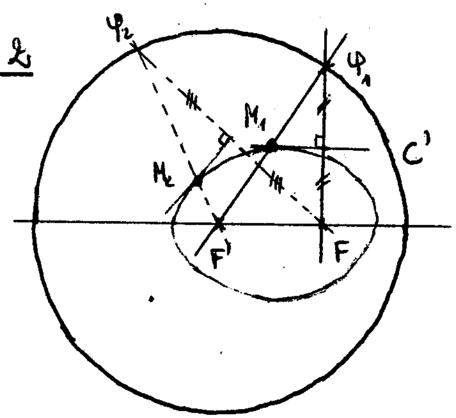


Figure 3

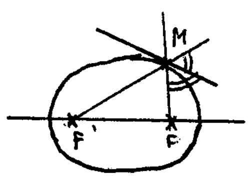


Figure 4