

137. Barycentre dans un espace affine réel de dimension finie - Convexité - Applications

I) Barycentre et repère affine dans un espace affine

1. Qu'est-ce qu'un barycentre ?

Définition: [Combes p 133] Soit E un espace affine. Soient $A_1, \dots, A_k \in E$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des scalaires. On dit que $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k)$ est un système de points pondérés.

Propositions: (1) Si $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$, soit M un point de E , le vecteur $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$ est indépendant de M .

(2) Si $\sum_{i=1}^k \alpha_i \neq 0$, il existe un unique point G de E vérifiant l'égalité: $\sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. De plus, pour tout point M de E , on a $(\sum_{i=1}^k \alpha_i) \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Définition: [Combes p 133]: Dans le cas (2), on dit que G est le barycentre des (A_i, α_i) , $1 \leq i \leq k$ qu'on notera $\text{bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I, k})$.

Remarque: [Audin p 69] Le barycentre du système $((A_i, \lambda_i))_{i \in I, n}$ est, pour tout scalaire λ non nul, le même que celui du système $((A_i, \alpha_i))_{i \in I, n}$.

Conséquences: On pourra toujours considérer le cas où $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.

Définition: [Audin p 69] On parle d'isobarycentre des points A_1, \dots, A_k lorsque tous les coefficients α_i sont égaux.

Exemple: L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment Σ_{AB} (Voir Annexe Figure 1)

Propriété d'associativité du barycentre: [Combes p 134] Soit I un ensemble fini. Soit $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ un famille finie de points pondérés de l'espace affine E , telle que $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$.

Soit $I = \bigcup_{p=1}^s I_p$ une partition de I . Supposons que $\forall p = 1, \dots, s$ $\alpha_i \neq 0$ pour $i \in I_p$ et introduisons $G_p = \text{bar}(A_i, \alpha_i)_{i \in I_p}$. Alors le barycentre G des $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ est aussi le barycentre de la famille $(G_p, \mu_p)_{1 \leq p \leq s}$.

Exemple: Soient A, B, C trois points distincts de E non alignés. L'isobarycentre des points A, B, C est aussi le barycentre de $((I, 2), (A, 1))$ avec I le milieu de Σ_{AB} (Voir annexe Figure 1).

2. Repère et coordonnées barycentriques.

Définition: [Combes p 137] Soit E un espace affine. On dit que $X = \{A_i\}_{i \in I}$ finie de E est un repère barycentrique si les vecteurs $v_i = A_i - A_1$ ($i \in I$) forment une base de E .

Dans ce cas, pour tout point M de E , il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ uniques tels que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ et $M = \text{bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in I, k})$.

Définition: [Combes p 137] On appelle ces scalaires les coordonnées barycentriques du point M dans le repère barycentrique X .

3. Caractérisation d'un point d'intersection de deux droites
Soit D une droite de E d'équation: $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$.
On la note $D(\lambda, \mu, \nu)$.

[Tisseron p 85]. Soient deux droites $D(u, v, w)$ et $D'(u', v', w')$ de E . Posons
$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = vw' - wv' + w'u - w'u' + w'v - wv'$$

- a) D et D' ont un point commun unique ssi $d \neq 0$
 Dans ce cas ce point est $P; d'(v'w'-wv', w'u'-uw', uv'-vu')$
- b) D et D' sont parallèles ssi $d=0$. Dans ce cas, si $D \neq D'$
 leur direction $\vec{D} = \vec{D}'$ est engendrée par le vecteur
 $a(v'w' - v'w, w'u'-uw', uv'-vu')$

4. Applications:

a) Théorème de Hénelaüs et de Ceva: [Tisseron p 86 et 62]
 Soit ABC un triangle. On travaille dans le repère affine
 t, B, C . Soient 3 points $A'(0, r, r')$, $B'(s, 0, s')$ et $C'(r, r', 0)$
 appartenant respectivement aux droites $(BC), (CA)$ et (AB) .

Alors:

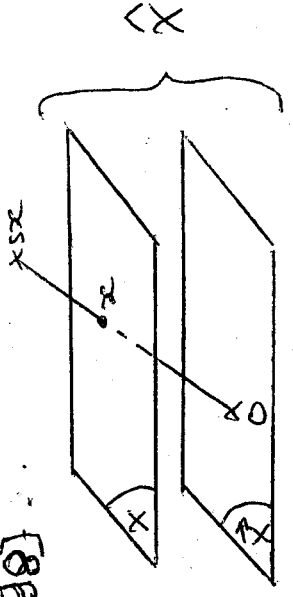
Théorème de Hénelaüs: Les points A', B', C' sont alignés
 ssi $\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = -1$ (voir Annexe figure 3)

ou, de manière équivalente, ssi $r's'' + r''s't' = 0$

Théorème de Ceva: Les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont
 parallèles ou concourantes ssi $\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = -1$
 ou, de manière équivalente, ssi $r's'' = r''s't'$.
 (voir Annexe figure 4).

b) Théorème de Pascal: [Tisseron p 91] Soient six
 points A, B, C, A', B', C' dont trois quelconques ne sont jamais
 alignés. Alors une conique non dégénérée passe par ces
 six points ssi les "points d'intersection" m, n, p des couples de
 droites $(BC', B'C), (AC, AC'), (AB, A'B)$ sont alignés. Cette
 conique est unique.
 (voir Annexe figure 5).

II) Élargissement de la notion de barycentre au repère universel
 [Tisseron p 98]



1. Théorème: [Tisseron p 100] Soit X un espace affine
 de direction \vec{X} . Il existe un espace vectoriel \hat{X}
 contenant X et \vec{X} comme sous espace affine et sous-espace
 vectoriel respectivement.

De plus X est un hyperplan affine de \hat{X} de direction \vec{X} .
 Chaque élément de \hat{X} , qui n'est pas dans \vec{X} , s'écrit de
 façon unique zx avec $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et x dans X . Pour chaque
 $z \in X$, on a $\hat{X} = \mathbb{R}x \oplus \vec{X}$.

2. Écriture du barycentre dans \hat{X} : [Tisseron p 104].
 Soient A_1, \dots, A_k des points de X et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des scalaires
 de somme $\alpha \neq 0$. Soit G le barycentre des $(A_i, \alpha_i); i \in \{1, k\}$
 On a $\sum \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$
 En écrivant cette relation dans \hat{X} , elle devient:

$$G = \alpha^{-1} \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i$$

3. Application: démonstration du théorème de Desargues
Théorème de Desargues: [Tisseron p 87]. Soient A, B, C, A', B', C'
 six points distincts de X dont trois quelconques ne sont
 jamais alignés, alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles
 ou concourentes ssi les "points d'intersection" m, n, p des
 couples de droites $(BC', B'C), (AC, AC'), (AB, A'B)$ sont alignés.

III) Co-existence et points extrémaux.

1. Enveloppe convexe

a) Lien entre enveloppe convexe et barycentre.

Définition: [Audin p 31] Soit E un espace affine. Une partie C de E est dite convexe si pour tous points A, B de C , le segment $[AB] = \{ \lambda A + (1-\lambda)B : \lambda \in [0,1] \}$ est contenu dans C .

Proposition: [Audin p 31] Toute intersection de convexes est convexe.

Définition: [Audin p 32] L'enveloppe convexe d'une partie S de E est l'intersection de tous les convexes contenant S . C'est la plus petite partie convexe de E contenant S .

b) Théorème de Carathéodory.

Théorème: [Tauvel p 77] Soit A une partie de E . Tout élément de l'enveloppe convexe de A s'écrit comme combinaison convexe de k points de A avec $k \leq 1+n$, $n = \dim E$.

Application: Si C est compact, son enveloppe convexe est également compacte.

2. Points extrémaux.

Définition: [Combes p 144] Un point P de la partie convexe C , qui ne peut être barycentre de deux points distincts de C , est appelé un point extrémal de C . (voir Annexe figure 7)

Exemple: $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule

Théorème de Krein-Milman: [Goblot p 103]. Si C est un convexe compact, alors C est l'enveloppe convexe de l'ensemble des points extrémaux de C .

Extr(C) généralisation des convexes

Références:

- Michèle Audin, "Géométrie"
- Combes, "Algèbre et géométrie"
- Tisseron, "Géométrie affine, euclidienne et projective"
- Rémi Goblot, "Thèmes de géométrie"
- P. Tauvel, "Cours de géométrie"

Développements:

- Démonstration du théorème de Desargues par le calcul barycentrique.
- $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité (notée B).

Rq: il est possible de parler de polyèdres convexes.

ANNEXE

Figure 1:

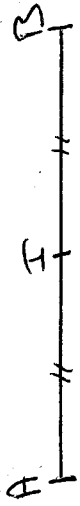


Figure 2:

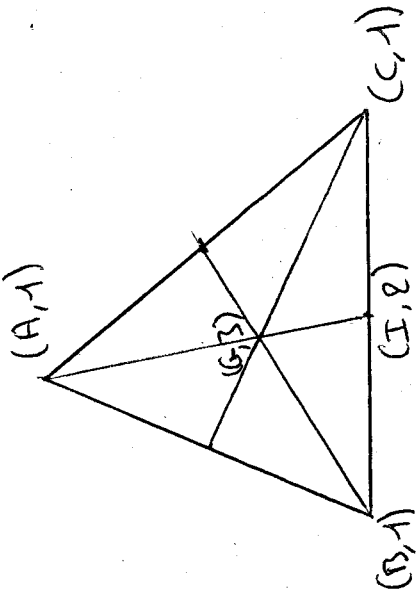


Figure 3:

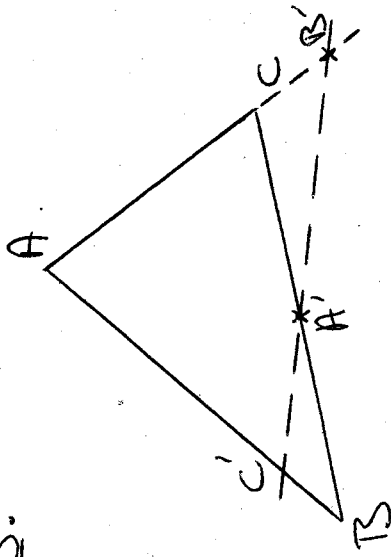


Figure 4:

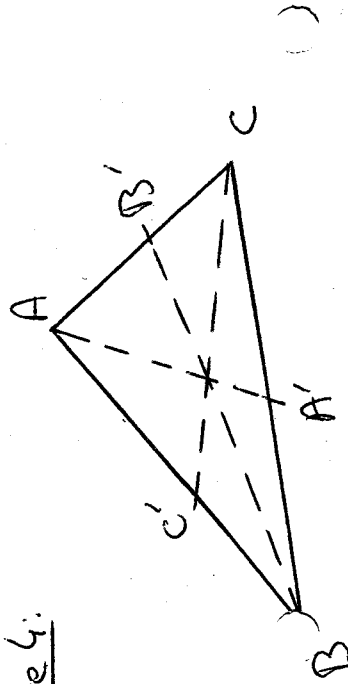


Figure 5:

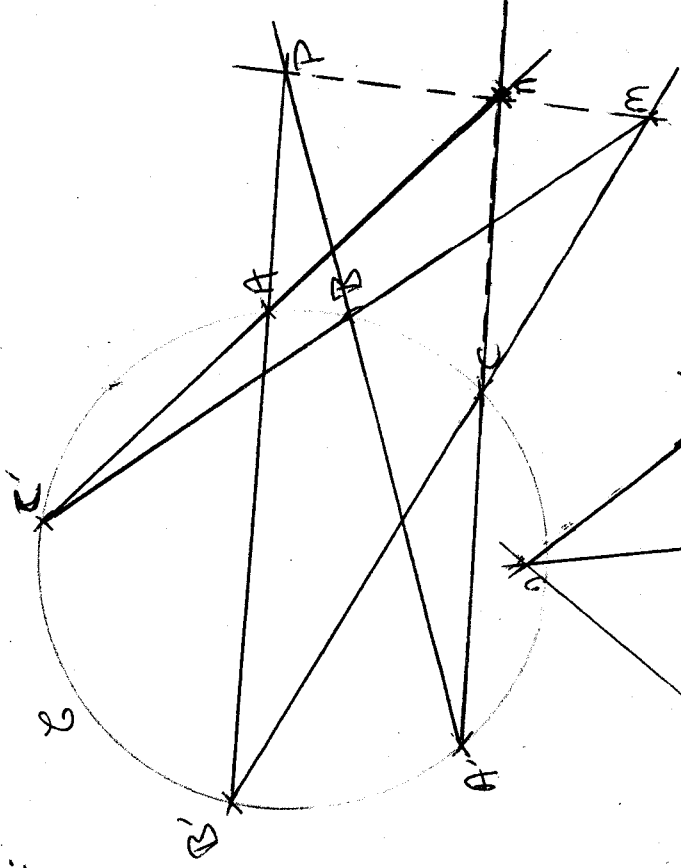


Figure 6:

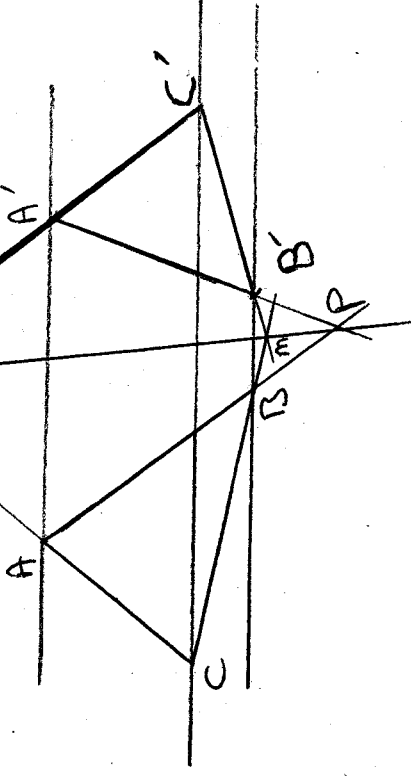


Figure 7: P est un point extrémal de C

