Autre Out : 3e pb de Hilbert : Raisonnement divin / Proof from the book.

144 - Problèmes d'angles et distances en dimension 2 et 3.

I - Définitions [TAU]

I - 1. Angles orientés et non orientés

E désigne un espace euclidien de dimension 2 ou 3. $\mathcal{O}(E)$ son groupe orthogonal et $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des demi-droites.

Déf : Soient $(d_1, d_2) \in \mathcal{D}_0^2$. On appelle angle non orienté de (d_1, d_2) son orbite sous l'action de $\mathcal{O}(E)$ sur $\mathcal{D}_0^2$.

Déf : On appelle angle non orienté de deux vecteurs non nuls x et y de E l'angle non orienté des deux demi-droites qu'ils engendrent.

Rmq : Si E est de dimension 2, on définit de manière analogue les angles orientés en remplaçant $\mathcal{O}(E)$ par $SO(E)$.

I - 2. Mesure d'angles orientés

E est dès lors de dimension 2.

Prop : $SO(E)$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des demi-droites.

Prop : Soit $\mathcal{A}_0$ l'ensemble des angles de demi-droites de E. Alors l'application qui a un couple de droites associe l'unique élément de $SO(E)$ qui envoie la première sur la seconde induit une bijection Ψ de $\mathcal{A}_0$ sur $SO(E)$.

Ainsi définie Ψ munit $\mathcal{A}_0$ d'une structure de groupe abélien.

On suppose E orienté et on considère les isomorphismes de groupes suivants :

$\phi : \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \longrightarrow S^1$, $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ $\quad$ $\Theta : SO(E) \cong SO_2(\mathbb{R}) \longrightarrow S^1$, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto a+ib$ $\quad$ $\Psi : \mathcal{A}_0 \longrightarrow SO(E)$

Déf : On appelle mesure de l'angle $\alpha \in \mathcal{A}_0$ l'élément $\rho(\alpha) = (\phi^{-1} \circ \Theta \circ \Psi)(\alpha)$.

I - 3 - Angles entre courbes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Déf : Soient $\gamma, \tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deux courbes $\mathcal{C}^1$ telles qu'il existe $t_0, s_0 \in I$ vérifiant $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(s_0) = M_0$ et $\gamma'(t_0) \neq 0$ et $\tilde{\gamma}'(s_0) \neq 0$. On appelle angle entre γ et $\tilde{\gamma}$ en M_0 l'angle $(\gamma'(t_0), \tilde{\gamma}'(s_0))$.

II - Géométrie plane

Maintenant $E = \mathbb{R}^2$.

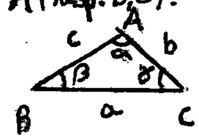
II - 1 Calcul de la distance d'un point à une droite [MON]

Prop : Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé direct. Alors, si $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\quad d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{|\det(\vec{AM}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|}$

Prop : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$ alors, si $M \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix}$, $d(M, d) = \dfrac{|a x_M + b y_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

II - 2 Géométrie du triangle [BER]

Formule d'Al-Kashi : Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et α (resp. β, γ) l'angle en A (resp. B, C). alors $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$



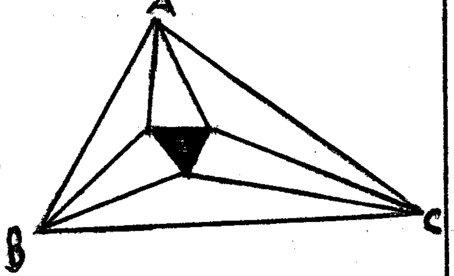
Pté : La somme des angles d'un triangle vaut π.

Th : [Formule des sinus]

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Application :

Th [Morley] Soit ABC un triangle. Alors le triangle A'B'C' formé par les intersections des trissectrices est équilatéral.



Th : [Formule de Héron]

Soit $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre du triangle ABC. Alors son aire vaut $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

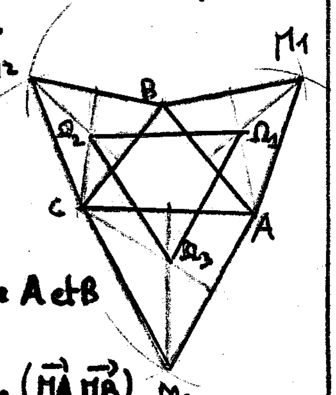
Th : [Thalès]

Soit ABC un triangle, $B' \in [A,B]$ et $C' \in [AC]$ tels que $(B'C') \parallel (BC)$ alors

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Théorème [Napoléon] [MERCIER]

Soit ABC un triangle. Soient M_1, M_2, M_3 les points extérieurs au triangle ABC et tels que les triangles ABM_1, BCM_2 et ACM_3 soient équilatéraux. Soient $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ les centres de gravités respectifs de ces triangles alors le triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ est équilatéral et possède le même centre de gravité que ABC.

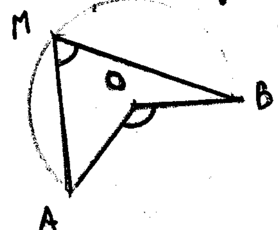


II-3. Cercles [MER]

Th: [Angle inscrit]

Soient $\mathcal{C}$ un cercle, O son centre et A, B deux points distincts de $\mathcal{C}$.

Alors pour tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et B on $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 2(\vec{MA}, \vec{MB})\ [2\pi]$



On dit que $(\vec{MA}, \vec{MB})$ est l'angle inscrit et $(\vec{OA}, \vec{OB})$ l'angle au centre.

aussi arc capable de Fresnel

Prop: Quatre points distincts A, B, C, D du plan son alignés ou cocycliques ssi $(\vec{CA}, \vec{CB}) = (\vec{DA}, \vec{DB})\ [\pi]$.

Prop: Quatre points A, B, C et D du plan d'affixes respectives a, b, c et d sont alignés ou cocycliques ssi $\frac{b-c}{a-c} \times \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$

Application:

Th: [Ptolémée]

Un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle ssi $AC.BD = AB.CD + AD.BC$

Th: [Arc capable]

Soient $\mathcal{C}$ un cercle, A et B deux points de $\mathcal{C}$ et a un réel. On définit l'arc capable de $\mathcal{C}$ d'extrémités A et B par $E(a) = \{M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B\} \mid (\vec{MA}, \vec{MB}) = a\ [2\pi]\}$.

i) Si $a = 0\ [2\pi]$ alors $E(a) = (AB) \setminus [A\ B]$

ii) Si $a = \pi\ [2\pi]$ alors $E(a) =]AB[$

iii) Si $a \neq 0\ [\pi]$ alors $E(a)$ est un arc de cercle d'extrémités A et B

II-4 Coniques [MER]

Définition bifocale des coniques à centre:

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $F, F' \in \mathbb{R}^2$ avec $FF' = 2c > 0$

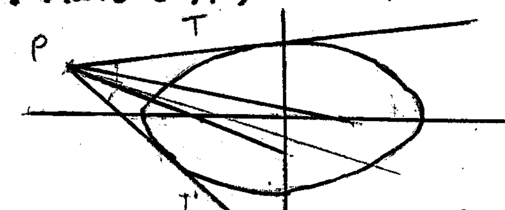
- Si $c < a$ alors $\mathcal{E} = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid MF + MF' = 2a\}$ est une ellipse de centre le milieu de $[FF']$, de grand axe (FF') et de foyers F et F'.
- Si $c > a$ alors $\mathcal{H} = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid |MF - MF'| = 2a\}$ est une hyperbole de foyers F et F'.

Th: [Premier th. de Poncelet]

Soit $\mathcal{C}$ une conique à centre de foyers F et F'. Soient M_1 et M_2 les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}$ issues d'un point P. Alors $(F'P)$ est une bissectrice de $(\vec{F'M_1}, \vec{F'M_2})$

Th: [Second th. de Poncelet]

Soient $\mathcal{C}$ une conique à centre de foyers F et F', et P un point du plan par lequel on peut abaisser deux tangentes T et T' à $\mathcal{C}$. Alors $(\widehat{T, T'})$ et $(\widehat{PF, PF'})$ ont même bissectrice.



II-5 Problèmes d'optimisation [FRE] + [MER] + [ROU]

Th: [Fagnano]

Soit ABC un triangle aux trois angles aigus. Soient P, Q, R des points sur respectivement $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Alors PQR a un périmètre minimal ssi c'est le triangle orthique de ABC (triangle dont les sommets sont les pieds des hauteurs).

Th: [Point de Fermat]

Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$. On suppose que les trois angles du triangle ABC sont strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. Alors la fonction $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ M \mapsto MA + MB + MC \end{array}$ admet un minimum en un unique point P, intérieur à ABC et distincts de ses sommets.

[DVLPT]

Th : [Erdős-Mordell]
Soit ABC un triangle et M un point à l'intérieur de ABC
alors $MA+MB+MC \geq 2\left(d(M,(AB))+d(M,(AC))+d(M,(BC))\right)$
L'égalité a lieu ssi ABC est équilatéral de centre M.

III - Géométrie dans l'espace [MON]

Maintenant $E=\mathbb{R}^3$

III-1 Calcul de la distance d'un point à un plan

Prop : Soit $\mathcal{P}$ un plan défini par un point A et deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ non colinéaires.
Soit $M \in \mathbb{R}^3$ alors $d(M,\mathcal{P}) = \dfrac{|(\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}).\overrightarrow{AM}|}{\|\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}\|}$

Prop : Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et M de coordonnées $\begin{pmatrix}x_M\\y_M\\z_M\end{pmatrix}$ alors $d(M,\mathcal{P}) = \dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

III-2 Fonction scalaire de Leibniz [MER]

Soit $(A_1(\alpha_1),\dots,A_n(\alpha_n))$ un système de points pondérés.
On lui associe la fonction scalaire de Leibniz $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$

Prop : [Formules de Leibniz]
- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ $f(M) = f(O) + 2\overrightarrow{MO}.\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$
- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, soit $G = \mathrm{bar}(A_i;\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ $f(M) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) MG^2 + f(G)$

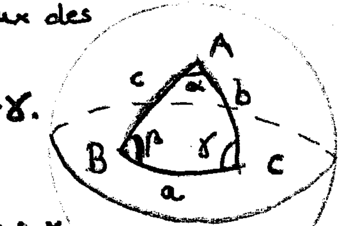
Applications :
Th : [Huygens]
Le moment d'inertie d'un système de points matériels $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ de masses $(m_i)_{1\leq i\leq n}$ par rapport à un axe Δ quelconque est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe Δ_G passant par G, centre d'inertie du système, augmenté $\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) d(\Delta,\Delta_G)^2$.

Prop : [Formule de Stewart]
Si $A,B,C \in \mathbb{R}^3$ sont alignés alors pour tout $M \in \mathbb{R}^3$
$\overline{BC}.MA^2 + \overline{CA}.MB^2 + \overline{AB}\,MC^2 + \overline{AB}\,\overline{BC}\,\overline{CA} = 0$
(où $\bar{\cdot}$ désigne la mesure algébrique après avoir orienté (AB))

III-3 Géométrie sphérique [AUD]

Soit S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ muni de sa norme euclidienne.

Déf : [Triangle sphérique]
Soient A,B,C trois points de S^2 deux à deux distincts.
Le triangle ABC est la frontière de l'intersection des trois hémisphères passant par deux des points et contenant le troisième.
On note α l'angle entre les grands cercles en A. De même on note β et γ.



Prop : [Formule de Girard]
Soit T un triangle sphérique d'angles α,β,γ.
Alors l'aire $\mathcal{A}(T)$ de T vaut $\mathcal{A}(T) = \alpha+\beta+\gamma-\pi$

Corollaire : $\alpha+\beta+\gamma > \pi$ (différent de la géométrie plane)

Prop : L'application $d : S^2 \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \arccos(\langle x,y\rangle)$
définit une distance sur S^2.

Th : Soit U un ouvert de (S^2,d) alors, il n'existe pas d'isométrie de (U,d) vers $\mathbb{R}^2$ (muni de la distance euclidienne)

Application : Un planisphère ne respecte pas les distances
[DVLPT]

Références :
- [TAU] Patrice Tauvel. Géométrie
- [MON] Jean-Marie Monier. Géométrie PCSI-PTSI
- [BER] Marcel Berger. Géométrie TOME 1
- [MER] Dany-Jack Mercier. Cours de géométrie
- [FRE] Jean Fresnel. Méthodes modernes en géométrie
- [ROU] François Rouvière. petit guide du calcul diff.
- [AUD] Michèle Audin. Géométrie.