n° ~~147~~ 144 : **Problèmes d'angles et distances en dimension 2 et 3**

On considère $\vec{E}$ un espace euclidien de dimension 2 ou 3 et E espace affine de direction $\vec{E}$.

I - Notions d'angles en dimension 2 [Mer]

1) Angles orientés

Déf : $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs unitaires de $\vec{E}$. On appelle angle orienté de $\vec{u}, \vec{v}$, noté $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$ la classe d'équivalence de $(\vec{u}, \vec{v})$ pour la relation : $(\vec{u}, \vec{v}) \sim (\vec{u'}, \vec{v'})$ ssi $\exists f \in SO(\vec{E})$ $\begin{cases} \vec{v} = f(\vec{u}) \\ \vec{v'} = f(\vec{u'}) \end{cases}$

Déf : D_1, D_2 deux droites de $\vec{E}$. On appelle angle orienté de D_1, D_2, noté $\overline{(D_1, D_2)}$ la classe d'équivalence de (D_1, D_2) pour la relation : $(D_1, D_2) \sim (\Delta_1, \Delta_2)$ ssi $\exists f \in SO(\vec{E})$ $\begin{cases} D_2 = f(D_1) \\ \Delta_2 = f(\Delta_1) \end{cases}$

Prop : L'application $\varphi : SO(\vec{E}) \longrightarrow \vec{E}^* \times \vec{E}^* / \sim$, $f \longmapsto \overline{(\vec{u}, f(\vec{u}))}$ est bijective et définit une structure de groupe additive sur $\vec{E}^* \times \vec{E}^* / \sim$.

Prop - Déf : Après orientation de $\vec{E}$, l'isomorphisme de groupes $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to SO(\vec{E})$ nous permet de définir la mesure d'angle orienté de vecteurs.

2) Angles non orientés (ou géométriques).

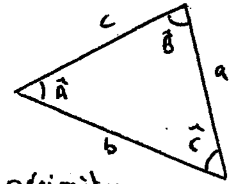
Déf : On appelle angle non orienté de $(\vec{u}, \vec{v})$ (respectivement (D_1, D_2)) noté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ (resp. $\widehat{(D_1, D_2)}$) la classe d'équivalence de $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$ (resp. $\overline{(D_1, D_2)}$) pour la relation : $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} \sim \overline{(\vec{u'}, \vec{v'})}$ ssi $\begin{cases} \overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \overline{(\vec{u'}, \vec{v'})} \\ \text{ou} \\ \overline{(\vec{u}, \vec{v})} = -\overline{(\vec{u'}, \vec{v'})} \end{cases}$ (resp. $\overline{(D_1, D_2)} \sim \overline{(\Delta_1, \Delta_2)}$ ssi $\begin{cases} \overline{(D_1, D_2)} = \overline{(\Delta_1, \Delta_2)} \\ \text{ou} \\ \overline{(D_1, D_2)} = -\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} \end{cases}$)

Déf : On appelle mesure de l'angle non orienté, la valeur absolue du représentant de l'un de ses angles orientés associés

Rq : • La mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ vaut $\text{Arcos}(\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle)$.
• les mesures d'angles non orientés sont indépendantes de l'orientation

II - Géométrie plane des triangles et des cercles

1) Géométrie du triangle [Sort]



• Formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Applications : * formule de Héron :

Aire $(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p demi-périmètre.

* Théorème de Napoléon :

On construit extérieurement à un triangle ABC les triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB' de centres respectifs O_1, O_2 et O_3. Alors $O_1O_2O_3$ est équilatéral et son centre est le centre de gravité de ABC.

• Loi des sinus : (ABC non plat) $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}} = 2R = \dfrac{abc}{2S}$

où R rayon du cercle circonscrit à ABC et S aire du triangle.

Applications : * évaluation de la hauteur d'une antenne inaccessible par un observateur

* en dimension 3, hauteur d'une montgolfière par deux observateurs

* Théorème de Morley : les intersections des trissectrices adjacentes des angles d'un triangle forment les sommets d'un triangle équilatéral

2) Problèmes de cocyclicité [Aud]

Théorème de l'angle inscrit : A, B, C 3 points distincts d'un cercle de centre O alors $\overline{(\vec{OA}, \vec{OB})} = 2\overline{(\vec{CA}, \vec{CB})}$

Critère de cocyclicité : A, B, C, D 4 points non alignés alors A, B, C, D cocycliques ssi $\overline{((CA), (CB))} = \overline{((DA), (DB))}$

Applications : * Théorème de Miquel : Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ 4 cercles tq $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_4 = \{A, A'\}$, $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_1 = \{B, B'\}$, $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_2 = \{C, C'\}$, $\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4 = \{D, D'\}$ alors A, B, C, D sont cocycliques ssi A', B', C', D' sont cocycliques.

* **Droite de Simson** : Soit ABC un triangle, M un point, P, Q et R ses projetés orthogonaux sur (BC), (AC) et (AB) alors P, Q, R sont alignés ssi M appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

III - Propriétés géométriques des coniques affines euclidiennes [Mer]

1) Propriétés élémentaires

Définition bifocale des coniques à centre :

- $2a > F_1F_2$: $\{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a\}$ ellipse de foyers F_1 et F_2 de demi grand axe a.
- $0 < 2a < F_1F_2$: $\{M \mid |MF_1 - MF_2| = 2a\}$ hyperbole de foyers F_1 et F_2.

2) Propriétés tangentielles

Déf : A, B, C 3 points distincts. On appelle bissectrice intérieure (resp. extérieure) de $\hat{A}$ l'axe de symétrie de la réflexion passant par A et envoyant $\vec{AB}/\|\vec{AB}\|$ sur $\vec{AC}/\|\vec{AC}\|$ (resp sur $-\vec{AC}/\|\vec{AC}\|$)

Théorème : Soit $\mathcal{C}$ une conique à centre de foyers F_1 et F_2, M un point de $\mathcal{C}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en M est une bissectrice (extérieure si $\mathcal{C}$ ellipse, intérieure si $\mathcal{C}$ hyperbole) de l'angle $(\vec{MF_1}, \vec{MF_2})$.

Théorème : Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$, M un point de $\mathcal{P}$ on note M' le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Alors la tangente en M à $\mathcal{P}$ est la médiatrice de $[FM']$ et c'est aussi la bissectrice intérieure de $(\vec{MM'}, \vec{MF})$.

3) Théorème de Poncelet

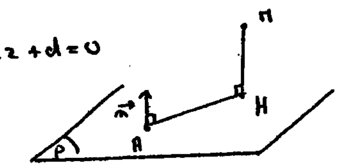
Théorème : Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F_1, F_2, M un point extérieur à $\mathcal{E}$ et soient $(MT_1), (MT_2)$ les tangentes à $\mathcal{E}$ passant par M où T_1, T_2 sont les points de tangence.
Alors $((MT_1), (MF_1)) = ((MF_2), (MT_2))$

Application : ellipse de Steiner
M_1, M_2 et M_3 3 points non alignés d'affixes respectives z_1, z_2, z_3; on pose $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$. Alors les racines de P' sont les foyers d'une ellipse tangente aux 3 côtés de $M_1M_2M_3$ en leurs milieux.

IV - Problèmes de distances

1) Calcul de distances en dimension 3 [Lad]

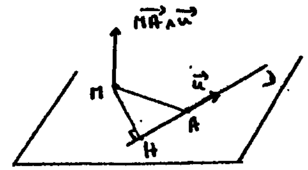
* distance d'un point à un plan.



Soit P un plan de E d'équation $ax + by + cz + d = 0$, $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur normal à P et soit $M(x, y, z)$ point de E.

On a $d(M, P) = HM = |\vec{AM} \cdot \vec{n}| / \|\vec{n}\|$
$$= \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

* distance d'un point à une droite :



$\mathcal{D}(A, \vec{u})$ droite de E, M point de E alors $d(M, \mathcal{D}) = \|\vec{MA} \wedge \vec{u}\| / \|\vec{u}\|$

2) Problèmes de minimisation de distances [Rou]

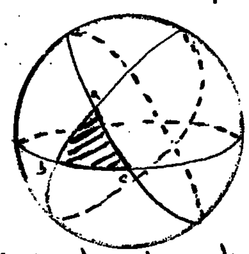
* **Problème de Fermat** : minimisation de $MA + MB + MC$ avec A, B, C 3 points distincts

- si $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < \frac{2\pi}{3}$ alors le minimum est atteint en un unique point M vérifiant $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \frac{2\pi}{3}$. De plus M est l'intersection de (AA'), (BB') et (CC') ainsi que celle des cercles circonscrits aux 3 triangles équilatéraux ABC', $AB'C$ et $A'BC$ (cf thm de Napoléon)
- si $\hat{A} > \frac{2\pi}{3}$ alors $M = A$.

*** Billard elliptique** : on cherche un triangle de périmètre maximal inscrit dans une ellipse donnée.
condition nécessaire : le triangle de périmètre maximal est une trajectoire fermée à 3 rebonds.

V - Géométrie de la sphère S^2 [Aud] + [Ber].

Déf : on appelle triangle sphérique un triplet (a, b, c) de points de S^2 n'appartenant pas à un même grand cercle. On peut confondre le triplet (a, b, c) avec la partie hachurée qui lui est associée.



Déf : l'angle non orienté entre 2 demi-plans vectoriels est l'angle non orienté entre les 2 demi-droites orthogonales à ces plans. Cela permet de définir les angles d'un triangle sphérique.

Prop : Formule de Girard
Soit T un triangle sphérique d'angles α, β, γ alors
$\text{Aire}(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Coro : la somme des angles d'un triangle sphérique est strictement supérieure à π.

Déf : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ 2 vecteurs unitaires de $\vec{E}$ alors
$d(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos(\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle)$ définit une distance sur S^2

Prop : Toute isométrie de S^2 pour d est la restriction d'une isométrie de $(\vec{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$

Prop : Soit U un ouvert non vide de S^2, il n'existe pas d'application $f : U \to \mathbb{R}^2$ qui préserve les distances.

Coro : On ne peut pas représenter la Terre sur une carte en conservant les distances

Bibliographie : Audin (nvelle version)
Mercier (cours de géométrie)
Ladegaillerie
Sortais (la géométrie du triangle)
Berger (vol. 5)
Rouvière