Leçon n° 119 : Exemples d'actions de groupe sur les espaces de Matrices

• Soit A un anneau euclidien et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

(I) Action par multiplication :

1. Action de $GL_n(\mathbb{K})$:

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$,

* $GL_n(\mathbb{K})$ agit à gauche sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$: $\begin{cases} GL_n(\mathbb{K}) \times M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (P,M) \longmapsto P\cdot M = PM \end{cases}$

[X-ENS 1] [M p5] • Prop : Deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même noyau

* $GL_n(\mathbb{K})$ agit à droite sur $M_{p,n}(\mathbb{K})$: $\begin{cases} M_{p,n}(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ (M,P) \longmapsto M\cdot P = MP \end{cases}$

[X-ENS 1] • Prop : Deux matrices de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite ssi elles ont même image

• Remarque : $GL_n(\mathbb{K})$ opère transitivement et fidèlement à gauche et à droite sur lui-même par translation.

2. Action de $\mathfrak{S}_n$: [DEL]

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
On définit la matrice de permutation $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\le i,j\le n}$.

• Prop : L'ensemble des matrices de permutation $\mathcal{P} = \{P_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ est un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

* $\mathfrak{S}_n$ agit à gauche (resp. à droite) sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $M_{p,n}(\mathbb{K})$) :
$\begin{cases} \mathfrak{S}_n \times M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\sigma, M) \longmapsto \sigma\cdot M = P_\sigma M \end{cases}$ (resp. $\begin{cases} M_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathfrak{S}_n \longrightarrow M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ (M,\sigma) \longmapsto M\cdot\sigma = MP_\sigma \end{cases}$)

• Prop : Deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $M_{p,n}(\mathbb{K})$) sont dans la même orbite pour l'action à gauche (resp. à droite) ssi elles ont les mêmes lignes (resp. colonnes) à permutation près.

→ Exemple : Si $M = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$, alors $\sigma\cdot M = \begin{bmatrix} L_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma^{-1}(n)} \end{bmatrix}$ et si $M = [C_1 | \dots | C_n]$, alors $M\cdot\sigma = [C_{\sigma(1)} | \dots | C_{\sigma(n)}]$

Application : Décomposition de Bruhat : [X-ENS 1]

(DVT) Soient $\mathcal{T} = \{M \in GL_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ est triangulaire supérieure}\}$
$\mathcal{U} = \{M \in GL_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ est unipotente supérieure}\}$

* On a une action de $\mathcal{U}\times\mathcal{T}$ sur $GL_n(\mathbb{K})$: $\begin{cases} (\mathcal{U}\times\mathcal{T}) \times GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K}) \\ ((U,T), M) \longmapsto UMT^{-1} \end{cases}$

• Prop : Il y a $n!$ orbites dont un système de représentants est $\mathcal{P} = \{P_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

Conséquence :
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{K}^n$.
Alors l'ensemble des orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ s'identifie à $\mathfrak{S}_n$.

(II) L'action de Steinitz :

1. Dans un corps

* $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ agit à gauche sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$: $\begin{cases} (GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})) \times M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q), M) \longmapsto (P,Q)\cdot M = PMQ^{-1} \end{cases}$

[OA] • Prop : Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même rang.
Il y a donc $m+1$ orbites (où $m = \min(n,p)$) dont un système de représentants est $\left\{ J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), r \in [\![0,m]\!] \right\}$

• Applications :
[OA] – Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Alors $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = M_n(\mathbb{K})$
[Gou] – $\overline{Orb(J_r)} = \bigsqcup_{k=0}^{r} Orb(J_k)$
[OA] – M et ${}^tM$ sont dans la même orbite
[X-ENS1] – Si $n \geq 2$, tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$

2. Dans un anneau euclidien :

* $GL_n(A) \times GL_p(A)$ opère sur $M_{n,p}(A)$ de la même façon ($(P,Q)\cdot M = PMQ^{-1}$)

• Théorème des facteurs invariants :
[OA] Si $M \in M_{n,p}(A)$, alors il existe une famille $(d_1, \dots, d_s)$ d'éléments non nuls de A tels que $d_1 | d_2 | \dots | d_s$ et tels que M soit dans l'orbite de $\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_s \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. De plus, si M est dans l'orbite de $\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} d'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d'_r \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ où $d'_1 | d'_2 | \dots | d'_r$,
Alors $r = s$ et les d_i et d'_i sont associés (pour tout $i \in [\![1,s]\!]$)

· Conséquence : Un système de représentants des orbites est $\left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_s & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$ où $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $d_i \neq 0$ et $d_1 | d_2 | \dots | d_s$.

· Remarque : Si A est un corps, on retrouve le résultat du 1.

III L'action par conjugaison

* $GL_n(\mathbb{K})$ agit à gauche sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison : $\begin{cases} GL_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}) \\ (P,M) \mapsto PMP^{-1} \end{cases}$

· Théorème des invariants de similitude et réduction de Frobénius :

[GOU] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe une unique famille $(P_1, \dots, P_s)$ de polynômes unitaires non constants tels que $P_s | P_{s-1} | \dots | P_1$ et tels que A soit dans l'orbite de $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_s} \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1,s]\!]$, C_{P_i} est la matrice compagnon du polynôme $P_i = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$: $C_{P_i} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{array}\right)$

· Conséquence : Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont mêmes invariants de similitude. Un système de représentants des orbites est $\left\{ \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_s} \end{pmatrix}, P_s | \dots | P_1 \text{ unitaires non constants} \right\}$

[SER] · Remarque : Les invariants de similitude de M sont les facteurs invariants de $M - XI_n$

· Prop : Réduction de Jordan :

[M] Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, Alors :

Deux matrices sont dans la même orbite ssi $\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{K}, \\ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} rg(A - \lambda I)^k = rg(B - \lambda I)^k$

[GOU] Un système de représentants est $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ est un bloc de Jordan associé à la valeur propre λ_i.

· Application : M et ${}^tM$ sont dans la même orbite

· Propriétés topologiques des orbites :

[X-ENS 2]
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice scalaire ssi son orbite est bornée
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi son orbite est fermée
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi $0 \in Orb(M)$.

[M]
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, Alors les orbites sont connexes par arcs.
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable ssi son orbite contient une matrice symétrique

1. Action de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$:

* $\mathcal{P}$ agit sur lui même par conjugaison : $\begin{cases} \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P} \\ (P_\tau, P_\sigma) \mapsto P_\tau P_\sigma P_\tau^{-1} = P_\tau P_\sigma P_{\tau^{-1}} \end{cases}$

[OA] · Théorème de Brauer :

P_σ et P_τ sont dans la même orbite ssi σ et τ sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$

· Conséquence : Il y a $p(n)$ orbites, où $p(n)$ est le nombre de partitions de l'entier n, c'est à dire le nombre de façons d'écrire $n = \sum_{i=1}^{h} m_i$ où $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_h$.

2. Réduction des isométries :

* $O_n(\mathbb{R})$ agit sur lui même par conjugaison : $\begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R}) \\ (P,M) \mapsto PMP^{-1} \end{cases}$

[GOU] · Prop : Les orbites ont un système de représentants de la forme $\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{\theta_r} & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ où $\theta_i \not\equiv 0 [\pi]$ et $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $\varepsilon_i = \pm 1$

· Application : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

3. Réduction des matrices unitaires :

* $U_n(\mathbb{C})$ agit sur lui-même par conjugaison : $\begin{cases} U_n(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C}) \to U_n(\mathbb{C}) \\ (U,M) \mapsto UMU^{-1} \end{cases}$

[GOU] · Prop : Les orbites ont un système de représentants de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$ où les θ_i sont réels

4. Réduction des matrices symétriques :

* $O_n(\mathbb{R})$ agit sur $S_n(\mathbb{R})$ par conjugaison : $\begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R}) \\ (P,M) \mapsto PMP^{-1} \end{cases}$

[GOU] · Prop : Chaque orbite contient une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où les λ_i sont réels

· Applications :
- Racine carrée d'une matrice symétrique positive : Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, [GOU] alors il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. De plus, B est unique.
- [LAD] Réduction de l'équation d'une conique euclidienne et classification euclidienne des coniques :

Toute conique admet une équation réduite de la forme : $\lambda x^2 + \mu y^2 + f' = 0$ ou $\mu y^2 + 2dx + f' = 0$

On en déduit que, dans un repère orthonormé, l'équation d'une conique euclidienne est de l'une des neuf formes suivantes :

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: ellipse
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$: hyperbole
- $y^2 = 2px$: parabole
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$: deux droites sécantes
- $y^2 = k^2$: deux droites parallèles
- $y^2 = 0$: droite
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$: ellipse imaginaire (vide)
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$: point
- $y^2 = -k^2$: deux droites imaginaires parallèles (vide)

5. Réduction des matrices hermitiennes :

* $U_n(\mathbb{C})$ agit sur $H_n(\mathbb{C})$ par conjugaison : $(U,H) \mapsto U \cdot H = UHU^{-1}$

[GOU] · Prop : Chaque orbite contient une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où les λ_i sont réelles (ce sont les valeurs propres de H).

· Application : · Pour toute matrice H hermitienne positive, il existe une unique matrice R hermitienne positive telle que $H = R^2$

6. Réduction des matrices normales :

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M{}^tM = {}^tMM\}$ l'ensemble des matrices normales.

* $O_n(\mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ par conjugaison : $(O,M) \mapsto OMO^{-1}$

[GOU] · Prop : Chaque orbite contient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1,r]\!], \lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $\tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

De plus, M et ${}^tM$ sont dans la même orbite.

(IV) L'action par congruence :

* $GL_n(\mathbb{K})$ agit à droite sur $M_n(\mathbb{K})$ par congruence : $\begin{cases} M_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}) \\ (M,P) \mapsto M \cdot P = {}^tPMP \end{cases}$

[M] · Prop : Deux matrices sont dans la même orbite ssi leurs parties symétriques et antisymétriques sont dans la même orbite.

1. Action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ (resp de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $H_n(\mathbb{C})$)

* $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $S_n(\mathbb{R})$ par congruence : $(S,P) \mapsto S \cdot P = {}^tPSP$

· Théorème de Sylvester :

[GRi] Toute matrice symétrique a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ dans son orbite

· Conséquence :

Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même signature.

Il y a $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ orbites dont un système de représentants est $\left\{\begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}, 0 \leq \ldots\right.$

· Application : - Classification affine des coniques : [GRI]

Soit C une conique d'équation $q(v) + \ell(v) = k$ où q est une forme quadratique.

Si C est non vide et non réduite à un point, alors :

- si $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$ ou $(0,2)$: C'est une ellipse
- si $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$, alors C est une hyperbole ou deux droites sécantes
- si $\mathrm{sign}(q) = (1,0)$ ou $(0,1)$, alors C est une parabole ou deux droites parallèles ou une droite.

· Remarque : Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{stab}(M) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tPMP = M\} = O_{(r,s)}$ est le groupe des isométries associé à une forme quadratique de signature (r,s)

* $GL_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ par congruence et l'unique orbite est représentée par I_n.

(DVT) || Application : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

2. Action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $S_n(\mathbb{C})$:

* $GL_n(\mathbb{C})$ agit à droite sur $S_n(\mathbb{C})$ par congruence : $(M,P) \mapsto M \cdot P = {}^tPMP$

[GRi] · Prop : Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même rang. Un système de représentants des orbites est $\left\{\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r \in [\![0,n]\!]\right\}$ et il y a $n+1$ orbites

3. Action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques inversibles)

[SER] · Prop : Si n est pair, il n'y a qu'une seule orbite dont un représentant est $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$ où $n = 2m$

[SER] · Prob : $\mathrm{stab}\left(\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}\right) = Sp_m$ est le groupe symplectique

· **Références** :

- [X-ENS1] : Francinou, Gianella, Nicolas, "Oraux X-ENS, Algèbre 1"
- [M] : Mneimné, "Réduction des endomorphismes"
- [DEL] : D. Delcourt, "Théorie des Groupes".
- [OA] : Objectif Agrégation
- [GOU] : Gourdon, "Algèbre"
- [SER] : D. Serre, "Les Matrices"
- [X-ENS2] : Francinou, Gianella, Nicolas, "Oraux X-ENS, Algèbre 2"