Chapitre E1: Probabilités

Modélisation mathématique

Contrairement aux autres sciences, les mathématiques n'étudient pas directement des phénomènes naturels, mais des objets abstraits provenant de tentatives de modélisation de la nature : on cherche à représenter des situations concrètes par des structures idéalisées, qui s'étudieront plus aisément.
La modélisation d'un phénomène est une démarche subjective, puisque l'on est amené à choisir quels sont les paramètres qui entreront en compte dans le modèle. Doit-on par exemple considérer que la température possède une influence sur les dimensions d'un objet métallique ? Tout dépendra de ce que l'on cherche à étudier : si l'on s'intéresse au déplacement d'une voiture on négligera probablement ce paramètre, alors que si l'on étudie le rayonnement thermique d'une barre d'acier chauffée à blanc, il est plus raisonnable de le prendre en compte.
Une modélisation s'effectue généralement en trois étapes :

i) Paramétrisation du modèle. Il s'agit de choisir les paramètres que l'on prend en compte, en fonction de ce que l'on cherche à savoir, et de la complexité mathématique que ces paramètres induisent. On choisit par exemple de représenter le déplacement d'un voiture par une fonction $t \mapsto x(t)$, qui sera considérée dérivable. On traduit également sous forme d'équation les principes physiques régissant le modèle : on considère par exemple que la somme des forces s'appliquant sur la voiture est égale au produit de sa masse par son accélération. On peut encore choisir de négliger les forces de frottement entre la voiture et le sol, si elles donnent naissance à une situation mathématique trop complexe.

ii) Étude du modèle. On oublie les fondements du modèle, et on étudie celui-ci en tant qu'objet abstrait, afin de recueillir le maximum d'informations sur l'objet étudié. On va par exemple essayer de résoudre l'équation différentielle régissant le mouvement de la voiture, afin d'obtenir la position $x(t)$ de celle-ci au cours du temps. Si la résolution est impossible, on retourne à l'étape précédente et l'on cherche à simplifier le modèle, quitte à négliger certains paramètres.

iii) Interprétation des résultats. On étudie enfin les résultats obtenus, afin de vérifier que ceux-ci sont cohérents avec les valeurs mesurées ; c'est l'occasion d'une étude critique du modèle : celui-ci était-il pertinent, voire réaliste ? Il ne reste alors plus qu'à exploiter les résultats pour chercher une solution pratique au problème que l'on s'était posé.

Modèles aléatoires et non déterminisme

On a coutume de penser que le résultat d'un lancer de dé est une variable aléatoire dont le résultat est compris entre 1 et 6, de sorte que chacune de ces 6 valeurs a une probabilité égale à $\frac{1}{6}$. Il s'agit bien entendu d'une vue de l'esprit : le résultat du lancer dépend de manière déterministe de la force et la direction dans laquel on le lance. Mais cette dépendance est tellement complexe (on dira sensible), que l'on est incapable de la comprendre, et donc de la prévoir : il serait déraisonnable de chercher à construire un robot qui, en lançant un dé donné, obtiendrait systématiquement la valeur 1 ! On modélisera donc le lancer d'un dé comme un phénomène aléatoire, c'est-à-dire un processus dont l'issue est toujours inconnue, mais de sorte que l'on connaisse les probabilités associées aux différents résultats possibles.
On appelle modèle aléatoire tout modèle faisant intervenir la notion de hasard, et l'on parle de modèle déterministe dans le cas contraire. Mais il est important de noter qu'un modèle aléatoire ne décrit pas forcément une situation non déterministe

1 Univers et événements

Définition 1.1

Dans une situation réelle donnée, aussi appelée ***expérience aléatoire*** *ou* ***épreuve****, on appelle* ***univers*** *et l'on note Ω, un ensemble dont les éléments représentent toutes les évolutions possibles de l'expérience considérée. Les éléments de Ω sont alors appelés* ***issues****,* ***résultats****,* ***éventualités*** *ou* ***tirages*** *de l'expérience.*

Remarque 1.2

On ne s'intéressera cette année qu'aux univers finis, et l'on nommera généralement $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les éléments de Ω.

Définition 1.3

Soit Ω un univers.

i) *on appelle* ***événement*** *toute partie de Ω.*

ii) *on appelle* ***événement élémentaire*** *toute partie de Ω à un élément.*

Remarques 1.4

i) Un événement est un ensemble d'issues possibles.

ii) Un événement élémentaire est un événement réduit à une seule issue ; c'est un ensemble de la forme $\{\omega\}$, où ω est une issue de Ω.

iii) En pratique, les événements que l'on considérera seront des ensembles d'issues possédant une caractéristique commune.

Définition 1.5

Le tableau suivant indique comment traduire en théorie des probabilités le vocabulaire élémentaire de la théorie des ensembles.

Vocabulaire des ensembles	***Vocabulaire des probabilités***	***Notation***
l'ensemble des parties de Ω	*l'ensemble des événements*	$\mathcal{P}(\Omega)$
la partie pleine de Ω	*l'événement certain*	Ω
l'ensemble vide	*l'événement impossible*	$\varnothing$
le complémentaire de A dans Ω	*l'événement contraire de A*	$\overline{A}$
l'intersection de A et B	*la conjonction (**et** logique) de A et B*	$A \cap B$
la réunion de A et B	*la disjonction (**ou** logique) de A et B*	$A \cup B$
A et B sont disjointes	*A et B sont incompatibles*	$A \cap B = \varnothing$
A est inclus dans B	*l'événement A implique l'événement B*	$A \subset B$

Exemple 1.6

Dans chaque cas, on écrira précisément l'univers considéré et les événements mis en jeu.

1. On considère le jet d'un seul dé et l'expérience où on considère le nombre obtenu et les événements :
   1.1. A « faire 6 » ;
   1.2. B « faire un nombre pair » ;
   1.3. C « faire un nombre impair » ;

1.4. D « faire 7 » ;

1.5. $E = A \cup C$

Quels événements sont incompatibles ?

2. On considère un jet de deux dés discernables et l'expérience où on considère la somme des faces du dé et les événements :

2.1. A « la somme vaut 5 » ;

2.2. B « faire un double » ;

2.3. C « la somme est inférieur à 4 » ;

2.4. $D = A \cap B$.

Définition 1.7

*Soit Ω un univers, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements** pour Ω ou une **partition** de Ω si les deux propriétés suivantes sont vraies :*

i) $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$;

ii) $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

Exemple 1.8

Si A est un événement, alors le système $\left(A, \overline{A}\right)$ est complet.

Exemple 1.9

On considère un jet de dé à six faces avec l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Déterminer deux systèmes complets d'événements.

Remarque 1.10

En pratique, on ne détaillera pas l'univers Ω dans la plupart des exercices : la modélisation sera implicite.

2 Probabilité sur un univers

Construire un modèle aléatoire c'est donner l'univers $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ qui énumère l'ensemble des issues possibles, puis associer une probabilité p_i à chaque issue ω_i. Le réel $p_i \in [0, 1]$ sera la probabilité que l'issue ω_i se réalise effectivement, et comme Ω est l'ensemble des issues possibles on a $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

On peut alors définir la probabilité d'un événement A comme étant la somme des probabilités des issues le constituant.

Définition 2.1

*Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers fini. On appelle **mesure de probabilité** sur Ω ou plus simplement **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que :*

i) Quels que soient les événements incompatibles A et B, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ii) $P(\Omega) = 1$.

*Le couple (Ω, P) est alors appelé un **espace probabilisé**.*

Proposition 2.2

On considère un espace probabilisé (Ω, P) ainsi que deux événements A et B. On a :

i) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

ii) $P(\Omega) = 1$ *et* $P(\varnothing) = 0$.

iii) $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.

iv) *Si* $A \subset B$, *alors* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

v) *Si* $A \subset B$, *alors* $P(A) \leqslant P(B)$.

vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proposition 2.3

On considère un espace probabilisé (Ω, P), et $A_1, \dots, A_m$ des événements deux à deux incompatibles. On a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2.4 (*Formule des probabilités totales*)

On considère un espace probabilisé (Ω, P), un événement B et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ un système complet. On a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B \cap A_i).$$

Définition 2.5

i) *Deux événements d'un espace probabilisé sont dit* ***équiprobables*** *s'ils ont la même probabilité.*

ii) *Un événement de probabilité nulle est dit* ***négligeable****.*

iii) *Un événement de probabilité* 1 *est dit* ***presque certain*** *ou* ***presque sûr****.*

Exemple 2.6

1. On lance un dé et l'on considère $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Lorsque $A \subset \Omega$ on pose, $P(A) = 1$ si $6 \in A$ et $P(A) = 0$ sinon. Donner un événement négligeable non vide.
2. On suppose qu'un feu tricolore reste 3s au vert, 1s à l'orange et 6s au rouge. Quelle est la probabilité de passer au vert en arrivant de manière aléatoire ?

Remarques 2.7

i) Il faut encore prendre garde à ne pas confondre l'événement impossible, qui correspond à l'ensemble $\varnothing$, avec un événement négligeable.

ii) De même, il ne faut pas confondre l'événement certain, qui correspond à l'ensemble Ω, avec un événement presque certain.

3 Probabilité uniforme

Le résultat suivant montre que pour construire une probabilité sur un univers, il suffit d'associer une probabilité à chaque issue, de sorte que la somme de ces probabilités vaut 1.

Théorème 3.1 (*Propriété fondamentale des probabilités finies*)

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers fini, et $p_1, \dots, p_n$ des éléments de $[0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Il existe alors une unique probabilité P sur Ω telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$.

Le théorème précédent permet de définir la probabilité uniforme. C'est celle que vous aviez l'habitude d'utiliser en Terminale.

Définition 3.2

*On appelle **probabilité uniforme** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la probabilité P définie par :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

Exemple 3.3

Soit P une probabilité uniforme sur un univers Ω. Montrer qu'il existe un unique événement négligeable.

Exemple 3.4

1. On lance un dé et l'on considère $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Lorsque $A \subset \Omega$ on pose, $P(A) = 1$ si $6 \in A$ et $P(A) = 0$ sinon. P est-elle la probabilité uniforme sur Ω ?
2. On jette deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des valeurs des faces. Calculer la probabilité d'obtenir 4.
3. On tire simultanément 3 boules dans une urne contenant 5 boules blanches et 10 boules noires. Calculer la probabilité de faire un tirage sans boule blanche en considérant que les tirages sont équiprobables.

Remarques 3.5

i) La probabilité uniforme est donc celle qui rend tous les événements élémentaires équiprobables.

ii) Par abus de langage, on emploie parfois la locution *au hasard* pour indiquer que l'univers est muni de la probabilité uniforme.

Théorème 3.6

Soit (Ω, P) un espace probabilisé muni de la probabilité uniforme. On a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}.$$

Autrement dit, la probabilité uniforme d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.

Exemple 3.7

On lance trois fois de suite un dé à six faces. La probabilité d'obtenir trois fois de suite le chiffre 1 est égale à $\frac{1}{6^3}$

Exemple 3.8
On tire simultanément deux boules au hasard dans une urne contenant deux boules noires, deux boules blanches et trois boules rouges. Soit A l'événement « tirer au moins une boule blanche » et B l'événement « tirer au moins une boule rouge » . Calculer les probabilités de A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

4 Probabilités conditionnelles

En pratique, on est souvent amené à considérer des *processus aléatoires*, c'est-à-dire des successions complexes d'étapes aléatoires plus simples (ces processus sont alors représentés par des arbres). Pour modéliser globalement un tel phénomène, on peut utiliser la notion de probabilité conditionnelle afin d'étudier l'interaction entre deux expériences successives.

Définition 4.1

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, et A un événement non négligeable. Pour tout événement B, on appelle ***probabilité conditionnelle*** *de B sachant A le réel noté $P(B|A)$ ou $P_A(B)$ défini par :*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Remarque 4.2
Une erreur consiste à penser que $A|B$ est un événement, mais cela est absurde.

La définition de la probabilité conditionnelle est validée par le résultat suivant.

Théorème 4.3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, et X un événement non négligeable. L'application :

$$P_X : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & P_X(A) = P(A|X) \end{cases}$$

est une probabilité sur Ω.

Comme P_X est une probabilité, les résultats des théorèmes 2.2 et 2.3 sont vérifiés avec cette probabilité :

Proposition 4.4

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, X un événement non négligeable et deux événements A et B. On a :

i) $P\left(\overline{A}\middle|X\right) = 1 - P(A|X)$.

ii) $P(\Omega|X) = 1$ *et* $P(\varnothing|X) = 0$.

iii) $P(B|X) = P(B \cap A|X) + P\left(B \cap \overline{A}\middle|X\right)$.

iv) Si $A \subset B$, *alors* $P(B \setminus A|X) = P(B|X) - P(A|X)$.

v) Si $A \subset B$, *alors* $P(A|X) \leqslant P(B|X)$.

vi) $P(A \cup B|X) = P(A|X) + P(B|X) - P(A \cap B|X)$.

vii) Soit $A_1, \ldots, A_m$ des événements deux à deux incompatibles. On a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \middle| X\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i|X).$$

Lemme 4.5

Soit A et B deux événements non négligeables. On a :

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A).$$

Exemple 4.6
On considère un jet d'un seul dé équilibré. Déterminer la probabilité de faire un deux (événement noté A) sachant que le tirage est pair (événement noté B). Calculer $P(B \mid A)$. Interpréter ce résultat.

Le théorème suivant est une conséquence directe de la formule des probabilités totales.

Théorème 4.7 (*Formule des probabilités totales, bis*)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ un système complet d'événements non négligeables, et B un événement. On a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P\left(B|A_i\right) P(A_i).$$

Notation 4.8
Dans le cas d'un système complet quelconque $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ on pose $P\left(B|A_i\right) P(A_i) = 0$, dès que $P(A_i) = 0$, pour tout événement B .On vérifie alors aisément que la formule ci-dessus reste valable avec cette convention, ce qui en pratique permet de l'appliquer sans avoir à vérifier l'hypothèse que les événements du système complet sont non négligeables.

Exemple 4.9

1. On tire successivement trois boules dans une urne contenant 6 boules blanches et 4 boules noires. Déterminons la probabilité de que la troisième boule tirée soit blanche.
2. Une urne contient deux dés. L'un est équilibré et l'autre donne systématiquement un 6. On choisit un dé dans l'urne et on le lance. On suppose que le dé lancé donne un 6, déterminons la probabilité que le dé soit équilibré.

5 Formule de Bayes

Considérons deux événements A et B tels que B soit une conséquence de A, avec la probabilité $P\left(B|A\right)$. Dans le cas où B peut également être conséquence d'autres événements, la quantité $P\left(A|B\right)$ est la la probabilité que, lorsque l'événement B s'est réalisé, l'événement A en soit la cause.

Théorème 5.1 (*Formule de Bayes*)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, ainsi que deux événements A et B non négligeables. On a :

$$P\left(A|B\right) = \frac{P\left(B|A\right) P(A)}{P(B)}.$$

Théorème 5.2 (*Formule de Bayes, bis*)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ un système complet d'événements non négligeables, et B un événement non négligeable. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$P\left(A_i|B\right) = \frac{P\left(B|A_i\right) P(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m} P\left(B|A_j\right) P(A_j)}.$$

Remarque 5.3
Lorsqu'un événement est conséquence de différents événements incompatibles, on peut calculer la probabilité que ce soit l'un d'entre eux qui en est effectivement la cause, grâce à la formule ci-dessus (quitte à compléter la famille des causes pour obtenir un système complet).

Exemple 5.4
La formule de Bayes est d'une grande importance pratique. Pour déterminer par l'exemple l'efficacité d'un vaccin, il faut déterminer la probabilité $P(I|V)$, où I désigne l'événement « être infecté », et V l'événement « être vacciné » . Mais on ne peut a priori pas déterminer cette probabilité expérimentalement (à moins d'inoculer volontairement la maladie à des personnes vaccinées !). Par contre on peut aisément déterminer une valeur approchée de $P(V|I)$. Il suffit pour cela d'effectuer un sondage dans un hôpital, et de déterminer parmi les patients infectés la proportion de ceux qui avaient été vaccinés. En connaissant $P(V)$ et $P(I)$, on déduit alors de la formule de Bayes une valeur de $P(I|V)$.

6 Formule des probabilités composées

Définition 6.1

*Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On dit que $m \geqslant 2$ événements $A_1, \dots, A_m$ sont **successifs** si l'on a*

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_m.$$

Les probabilités conditionnelles permettent de calculer la probabilité d'une séquence d'événements successifs, connaissant la probabilité de chacun sachant les précédents.

Théorème 6.2 (*Formules des probabilités composées*)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $m \geqslant 2$ événements $A_1, \dots, A_m$ non négligeables. Posons $A_0 = \Omega$.

i) Si $A_1, \dots, A_m$ sont successifs, alors on a :

$$P(A_m) = \prod_{k=1}^{m} P(A_k | A_{k-1}) \qquad = P(A_m|A_{m-1}) P(A_{m-1}|A_{m-2}) \cdots P(A_2|A_1) P(A_1).$$

ii) Dans tous les cas, si $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ est non négligeable, on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) = \prod_{k=1}^{m} P\left(A_k \middle| \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right).$$

Exemple 6.3
On effectue un tirage sans remise de trois boules dans une urne contenant 2 boules rouges, 3 boules bleues et 5 boules noires.

i) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule bleue, une boule rouge puis une boule bleue.

ii) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre deux boules bleues puis une boule rouge.

iii) Calculer la probabilité de tirer une boule noire au troisième tirage.

Remarque 6.4
Lorsque l'on cherche à comprendre un processus aléatoire, il est parfois utile de représenter celui-ci par un arbre (mais attention, la réalisation d'un arbre ne constitue pas une preuve). On retiendra alors les conventions et résultats suivants :

i) On appelle chemin toute suite de nœuds distincts reliés par un segment. Chaque nœud de l'arbre est alors relié à la racine par un unique chemin. Le nombre de segments de ce chemin (appelé aussi sa longueur) est appelé profondeur du nœud.

ii) Dans un arbre probabiliste, chaque nœud correspond à un évenement et chaque profondeur de l'arbre correspond à un système complet d'évenements. Par convention la racine de l'arbre correspond à l'évenement certain Ω.

iii) Au segment reliant le nœud A au nœud B est associé la probabilité conditionnelle de B sachant la conjonction de tous les évenements des nœuds reliant le nœud A à la racine. Cette probabilité est appelée le poids du segment.

iii) La somme des poids des segments issus d'un même nœud est égale à 1.

iv) Le produit des poids de tous les segments d'un chemin reliant un nœud à la racine est égal à la probabilité de la conjonction de tous les évenements des nœuds reliant le nœud A à la racine. (cela résulte de la formule des probabilités composées).

v) La probabilité d'un évenement est égal à la somme sur tous les chemins reliant cet évenement à la racine, des produits des poids des segments de ces chemins. (cela résulte de la formule des probabilités totales).

7 Indépendance

Définition 7.1

*Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si :*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exemple 7.2
On considère $\Omega = [\![1, 20]\!]$ et on tire un numéro au hasard. On considère les événements A « le nombre tiré est pair » et B « le nombre est un multiple de 3 » et C « le nombre tiré est impair ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements B et C sont-ils indépendants ? Même question en prenant $\Omega = [\![1, 21]\!]$. Interpréter.

Remarque 7.3
L'indépendance de deux événements correspond le plus souvent à un choix effectué lors de la modélisation, et n'est alors pas démontrable. Cela correspond parfois à la décision de négliger certains paramètres, afin de simplifier le modèle. Mais dans certains cas, l'indépendance est une conséquence implicite (voire imprévue) de la modélisation, et c'est le calcul qui permet de la vérifier.

Exemples 7.4
La dépendance et l'incompatibilité sont deux notions différentes, à ne pas confondre ! Par exemple :

i) Si $A \neq \varnothing$, alors les événements A et Ω sont indépendants mais pas incompatibles ;

ii) Si $P(A) \in]0, 1[$, les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles mais pas indépendants ;

iii) On lance un dé équilibré. Soit A l'événement « Obtenir un nombre pair » et B l'événement « Obtenir un nombre multiple de trois » . Les événements A et B sont indépendants mais pas incompatibles.

Théorème 7.5

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, A et B deux événements non négligeables. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) *A et B sont indépendants.*

ii) $P(A|B) = P(A)$.

iii) $P(B|A) = P(B)$.

Théorème 7.6

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On a :

i) *Tout événement est indépendant de l'événement impossible $\varnothing$ et de l'événement certain Ω.*

ii) *Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ le sont.*

iii) *Soit B un événement, et $A_1, \dots, A_m$ des événements deux à deux incompatibles, tels que chacun d'entre eux soit indépendant de B. B est indépendant de $A_1 \cup \dots \cup A_m$.*

Il nous reste encore à définir la notion d'indépendance pour un nombre quelconque d'événements $A_1, \dots, A_m$. L'idée est que l'indépendance deux à deux de ceux-ci ne correspond pas à l'indépendance globale de cette famille : on peut imaginer que A_1 ne soit conséquence d'aucun des autres A_i, mais que pourtant la conjugaison de ces facteurs implique A_1.

Définition 7.7

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille d'événements. On dit que $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est ***indépendante*** *ou que $A_1, \dots, A_m$ sont* ***mutuellement indépendants*** *si, quel que soit $k \in [\![1, m]\!]$ et les entiers distincts $i_1, \dots, i_k$ appartenant à $[\![1, m]\!]$:*

$$P\left(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k}).$$

Remarque 7.8

Dans le cas $n = 3$, on obtient que trois événements A, B, C sont mutuellements indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C) \qquad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

Exemple 7.9

On lance deux dés discernables et l'on considère les événements A « le premier dé lancé donne un résultat pair » B « le second dé lancé donne un résultat pair » et C « la somme des deux dés est un résultat pair ». Les événements A, B, C sont-ils indépendants deux à deux ? Les événements A, B, C sont-ils mutuellement indépendants ?

Théorème 7.10

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille d'événements. On définit une famille $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ telle que $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$. $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ est indépendante si et seulement si $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ l'est.