Chapitre D2: Géométrie dans l'espace

Dans ce chapitre, nous supposerons connues les notions suivantes : point, vecteur, distance, norme, angle et orthogonalité. Nous noterons $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace, et $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1 Bases, repères, coordonnées et orientation

1 a) Coordonnées cartésiennes

On admet le résultat suivant, qui signifie que $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ est de dimension 3.

Théorème 1.1

Les bases de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ sont les familles libres de cardinal 3 (c'est-à-dire contenant exactement 3 vecteurs). Si on note $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, on a :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}},\ \exists!(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{u} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}.$$

On dit que (x,y,z) sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathscr{B}$. On notera $[\overrightarrow{u}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Définition 1.2

*On appelle **repère** cartésien de l'espace $\mathscr{E}$ tout quadruplet $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ où O est un point de $\mathscr{E}$ appelé origine du repère et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.*

Théorème et définition 1.3

Soit $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ un repère de $\mathscr{E}$. Alors :

$$\forall M \in \mathscr{E},\ \exists!(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}.$$

On dit que (x,y,z) sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$. On notera $[M]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Notations 1.4

On déduit directement des résultats ci-dessus que deux vecteurs (resp. points) sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées dans une base (resp. un repère) fixé(e). Étant donné une base $\mathscr{B}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ et un repère $\mathcal{R} = (O; \mathscr{B})$ de $\mathscr{E}$, on peut donc identifier (abusivement) points et vecteurs à leurs coordonnées.

i) L'écriture $M(x,y,z)_{\mathcal{R}}$ signifiera que M est le point de coordonées (x,y,z) dans le repère $\mathcal{R}$, mais on évitera d'écrire $M = (x,y,z)_{\mathcal{R}}$.

ii) De même, on utilisera la notation $\overrightarrow{u}(x,y,z)_{\mathscr{B}}$ mais on évitera d'écrire $\overrightarrow{u} = (x,y,z)_{\mathscr{B}}$.

iii) Enfin, on supprimera les références au nom $\mathcal{R}$ du repère et $\mathscr{B}$ de la base lorsque cela ne prêtera pas à confusion.

1 b) Orientation et angles orientés

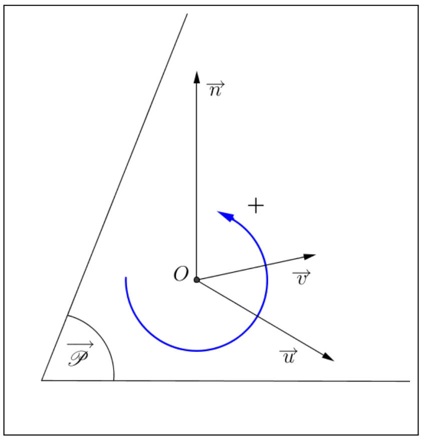
Définition 1.5

Soit $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ un plan engendré par deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

*i) On dit que $\overrightarrow{n}$ **oriente** le plan $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ de la manière suivante : le sens positif est le sens trigonométrique lorsque l'on regarde le plan $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ par dessus, c'est-à-dire lorsque le vecteur $\overrightarrow{n}$ pointe vers notre œil.*

*ii) Toute mesure d'angle calculée avec cette orientation est appelée une **mesure d'angle orienté** par $\overrightarrow{n}$.*

*iii) Si une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orienté par $\overrightarrow{n}$ est comprise entre 0 est π, on dit que $\overrightarrow{n}$ est **directement orthogonal** à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*



Définition 1.6

*i) Un repère (ou une base) est dit **orthogonal** lorsque ses vecteurs de base sont orthogonaux.*

*ii) On dit qu'un repère (ou une base) est **orthonormal(e)** ou **orthonormé(e)**, lorsque ses vecteurs de base sont orthogonaux et de norme égale à 1.*

iii) Soit $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ un repère orthogonal et $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Lorsque $\overrightarrow{e_3}$ est directement orthogonal à $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ on dira que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathscr{B}$) est direct(e) ; sinon on dira que $\mathcal{R}$ (resp. $\mathscr{B}$) est indirect(e).

Exemple 1.7
On considère une base orthonormale directe $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Déterminer le caractère direct ou indirect des bases suivantes : $\left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, $\left(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\imath}\right)$, $\left(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k}\right)$, $\left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1 c) Coordonnées cylindriques

Soit $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé direct.

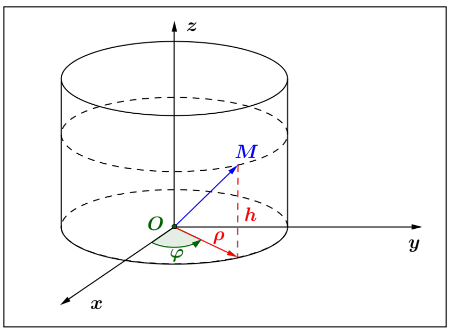
Définition 1.8

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. On appelle $\overrightarrow{u_\varphi}$ le vecteur défini par $\overrightarrow{u_\varphi} = \cos\varphi \overrightarrow{\imath} + \sin\varphi \overrightarrow{\jmath}$.

Définition 1.9

Soit ρ, φ, h des réels. On dit qu'un point M de l'espace admet (ρ, φ, h) pour coordonnées cylindriques relativement à $\mathcal{R}$ lorsque :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\varphi} + h\overrightarrow{k}.$$



Remarque 1.10
(ρ, φ) est un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal de M sur le plan $O + \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ orienté par le vecteur $\overrightarrow{k}$.

Exemple 1.11
On considère un repère orthonormé direct et M le point de coordonnées cartésiennes $(1, 1, 4)$. Déterminer les coordonnées cylindriques de M. On déterminera de façon générales les relations entre les coordonnées cartésiennes d'un point $M(x, y, z)$ et ses coordonnées sphériques (ρ, φ, h).

1 d) Coordonnées sphériques

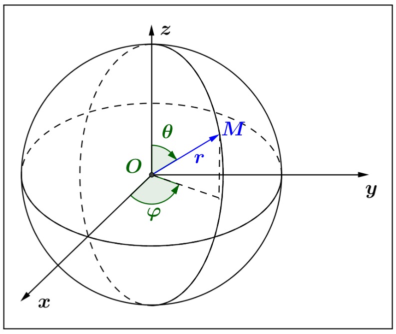
Soit $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé direct.

Définition 1.12

Soit r, θ, φ des réels. On dit qu'un point M de l'espace admet (r, θ, φ) pour coordonnées sphériques relativement à $\mathcal{R}$ lorsque l'on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\overrightarrow{u_\varphi} + r\cos\theta\,\overrightarrow{k}.$$

*On dira que θ est la **colatitude** de M, et φ est appelé la **longitude** de M.*



Remarque 1.13
Le couple $(r\sin\theta, \varphi)$ qui est un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal de M sur le plan $O + \mathrm{Vect}\left\{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right\}$ orienté par $\overrightarrow{k}$.

Théorème 1.14 (*Changement de coordonnées*)

Soit M un point admettant $(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ pour coordonnées cartésiennes et (ρ, θ, φ) pour coordonnées sphériques dans $\mathcal{R}$. On a alors :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad \text{et} \quad z = r\cos\theta$$

Exemple 1.15
Déterminer les coordonnées sphériques du point $M(1, 1, 1)$ dans un repère orthonormé.

2 Produit scalaire

Soit $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé direct. On considérera la définition d'angle entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vue plus haut.

Définition 2.1

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, le réel :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) & \text{si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ désigne l'angle géométrique formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Remarque 2.2
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace on a directement $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$.

Les trois théorèmes et la proposition suivants possèdent des démonstrations analogues au chapitre D1.

Théorème 2.3

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0 \iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Proposition 2.4

Soit $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ quatre vecteurs de l'espace.

i) Si les coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ de l'espace sont respectivement $\overrightarrow{u_1}(x_1,y_1,z_1)$ et $\overrightarrow{u_2}(x_2,y_2,z_2)$, alors $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

ii) Le produit scalaire est une forme bilinéaire : si λ_1 et λ_2 sont deux réels, alors :

$$(\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2})\cdot\overrightarrow{v_1}=\lambda_1(\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{v_1})+\lambda_2(\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{v_1}) \text{ et } \overrightarrow{u_1}\cdot(\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}) = \lambda_1(\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{v_1})+\lambda_2(\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{v_2})$$

iii) Le produit scalaire est symétrique : $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{u_1}$

iv) Le produit scalaire est défini positif : $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_1}\geqslant 0$ et $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_1}=0$ si et seulement si $\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{0}$.

On dira que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.

Théorème 2.5

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de l'espace. On a les propriétés suivantes :

i) $\|\lambda\overrightarrow{u}\|=|\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\|$;

ii) $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$ et $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$;

iii) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$;

iv) $2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2\right)=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2$.

Théorème 2.6

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (x,y,z) dans une base orthonormée $\mathscr{B}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$. On a alors :

$$x=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{e_1}\ ,\ y=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{e_2}\quad\text{et}\quad z=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{e_3}.$$

ou en d'autres termes : $\overrightarrow{u}=(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{e_1})\,\overrightarrow{e_1}+(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{e_2})\,\overrightarrow{e_2}+(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{e_3})\,\overrightarrow{e_3}$.

Exemple 2.7
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que s'ils sont orthogonaux deux à deux alors la norme de leur somme au carré est la somme de leurs normes au carré. La réciproque est-elle vraie ?

3 Produit vectoriel

Soit $\mathcal{R}=\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé direct.

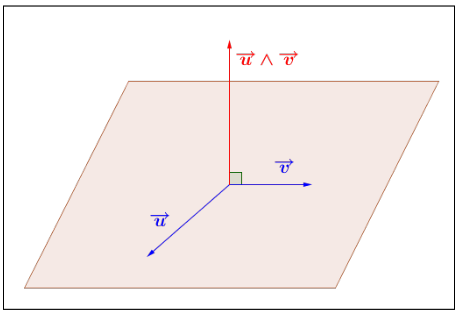
Définition 3.1

*Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors on définit le vecteur $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par :*

i) $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires,

ii) sinon, $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur tel que :

- *$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,*
- *$\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|=\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|\cdot|\sin(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})|$,*
- *La base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ est directe.*



Proposition 3.2

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Si $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, alors $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Proposition 3.3

Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) dans une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ orthonormée directe, alors le vecteur $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.4

On peut retrouver cette formule grâce à la règle du « triple gamma » : les coordonnées précédentes respectives sont $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$.

Proposition 3.5

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C sont trois points de l'espace.

i) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ est égal à l'aire du parallélogramme construit à partir de ces vecteurs.

ii) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ce qui signifie que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \iff A$, B et C sont alignés.

La proposition suivante possède une démonstration analogue à celle pour le produit scalaire.

Proposition 3.6

Soit $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ quatre vecteurs de l'espace et λ_1 et λ_2 deux réels.

i) Le produit vectoriel est bilinéaire :

$$(\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{v_1} = \lambda_1(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_1}) + \lambda_2(\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v_1}) \text{ et } \overrightarrow{u_1} \wedge (\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}) \ = \lambda_1(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_1}) + \lambda_2(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_2}).$$

ii) Le produit vectoriel est antisymétrique : $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{u_1}$.

Théorème 3.7

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ unitaires et orthogonaux et $\overrightarrow{w}$ un vecteur. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

Exemple 3.8

Soit $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée directe. Que valent $\overrightarrow{\imath} \wedge \overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{\imath} \wedge \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{k}$?

4 Produit mixte

Soit $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé direct.

Définition 4.1

*Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle **produit mixte** de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ le réel :*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}.$$

Proposition 4.2

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et A, B, C et D quatre points de l'espace. Alors :

i) *Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont non nuls, $|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$ est égal au volume du parallélépipède construit à partir de ces vecteurs.*

ii) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0 \iff (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est liée* $\iff \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *sont coplanaires.*

iii) $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0 \iff A, B, C$ *et* D *sont coplanaires.*

Proposition 4.3

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une base de l'espace. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base directe (resp. indirecte) si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] > 0$ (resp. $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] < 0$).

Notation 4.4

Soit $\mathscr{B}$ une base de l'espace et $\overrightarrow{u_1}(x_1, y_1, z_1)_{\mathscr{B}}$, $\overrightarrow{u_2}(x_2, y_2, z_2)_{\mathscr{B}}$ et $\overrightarrow{u_3}(x_3, y_3, z_3)_{\mathscr{B}}$ trois vecteurs. On note $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ ou $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ la quantité suivante, appelée déterminant de $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Proposition 4.5

Soit $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ trois vecteurs de l'espace de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) dans une base orthonormée directe $\mathscr{B}$. On a :

$$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}] = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}).$$

En d'autres termes, dans n'importe quelle base orthonormée directe, le produit mixte de trois vecteurs de l'espace est égal à leur déterminant.

Exemple 4.6

Calculer le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Remarques 4.7

Produit mixte et déterminant ne sont pas égaux si la base considérée n'est pas orthonormée directe. Néanmoins, on peut démontrer que quelle que soit la base considérée, ils sont proportionnels. En particulier, on retiendra que quelle que soit la base $\mathscr{B}$, et les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3) dans la base $\mathscr{B}$, on a :

$$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \text{ liée} \iff [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}] = 0.$$

Proposition 4.8

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.

i) *Le produit mixte est trilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ses variables.*

ii) *Le produit mixte est antisymétrique, c'est-à-dire que si permute deux vecteurs, le produit mixte est multiplié par -1, tandis que si on effectue une permutation circulaire, il reste inchangé :*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] \quad \text{et} \quad [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]$$

5 Plans dans l'espace

Définition 5.1

Soit A un point et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

i) On appelle plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \in \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Ce plan sera noté $A + \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{A + s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v} \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$.

ii) Le plan vectoriel $\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ sera appelé le plan vectoriel associé à $A + \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$.

Théorème 5.2 (*Représentation paramétrique d'un plan*)

Soit $\mathcal{R}$ un repère de l'espace, $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\overrightarrow{u}(a,b,c)$, $\overrightarrow{u'}(a',b',c')$ deux vecteurs non colinéaires. Alors pour tout point $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$:

$$M \in A + \operatorname{Vect}\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right\} \iff \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_A + sa + ta' \\ y = y_A + sb + tb' \\ z = z_A + sc + tc' \end{cases}$$

Définition 5.3

Soit $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$. On dit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ lorsque $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ et :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}},\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0.$$

Remarque 5.4
Un plan possède deux vecteurs unitaires normaux, donnant ses deux orientations possibles.

De façon analogue aux droites dans le plan, on a les considérations suivantes :

Remarque 5.5
Soit $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$ et $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère de $\mathscr{P}$. Alors pour tout point $M \in \mathscr{E}$:

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\iff \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v} \iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont coplanaires} \\ &\iff \left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}\right] = 0 \iff (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, alors pour tout point M :

$$M \in \mathscr{P} \iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont orthogonaux} \iff \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

Théorème 5.6 (*Équation cartésienne d'un plan*)

Tout plan possède une équation cartésienne de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$. Réciproquement, toute équation cartésienne de ce type décrit un plan. De plus, dans un repère orthonormé, le vecteur $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ est normal à $\mathscr{P}$.

Exemple 5.7
Donner une paramétrisation du plan $(\mathscr{P}) : x + y + z - 1 = 0$ dans un repère quelconque.

Exemple 5.8
On se place dans un repère quelconque. Donner une équation du plan passant par $A(1,0,-3)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(3,-2,1)$ et $\overrightarrow{v}(-1,5,2)$.

6 Droites dans l'espace

Définition 6.1

Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace.

i) On appelle droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$. Cette droite sera notée $A + \mathrm{Vect}\,\{\overrightarrow{u}\} = \{A + t\overrightarrow{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

ii) La droite vectorielle $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ sera appelée la droite vectorielle associée à $A + \mathrm{Vect}\,\{\overrightarrow{u}\}$.

Théorème 6.2 (*Représentation paramétrique d'une droite*)

Soit $\mathcal{R}$ un repère de l'espace, $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul. Alors, pour tout point $M(x, y, z)$, on a :

$$M(x, y, z) \in A + \mathrm{Vect}\,\{\overrightarrow{u}\} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Théorème 6.3

Soit $\mathcal{R}$ un repère de l'espace.

i) Toute droite possède une équation cartésienne de la forme :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases},$$

où $(\delta, \delta') \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{n'}(\alpha', \beta', \gamma')$ sont des vecteurs non colinéaires.

ii) Réciproquement, toute équation cartésienne de ce type décrit une droite.

Exemple 6.4

Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé direct. Donner un couple d'équations cartésiennes de la droite passant par $A(1, 1, 1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(0, -1, 1)$.

Définition 6.5

Soit $\mathscr{D}$ une droite. On dit qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est **normal** *à $\mathscr{D}$ si : $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{D}},\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.*

Exemple 6.6

On considère le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$. Justifier qu'on définit ainsi une droite dont on donnera un vecteur directeur.

7 Intersection de droites et de plans

Dans toute la suite, on considère $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace $\mathscr{E}$. On ne donne pas ici l'ensemble des théorèmes pour étudier les intersections de droites et de plans mais quelques méthodes générales.

Exemple 7.1

Quelle est la nature géométrique de l'intersection des plans $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ d'équations cartésiennes respectives $x + ay = a$ et $x + bz = 0$.

Exemple 7.2
Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la droite $(\mathscr{D}) : \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - az - 1 = 0 \end{cases}$ soit parallèle au plan $(\mathscr{P}) : x + 2y - 4z + 5 = 0$.

Remarque 7.3
Soit $\mathscr{D}_1$ une droite de vecteur directeur $\vec{u_1}$ et $\mathscr{D}_2$ une droite de vecteur directeur $\vec{u_2}$. Quatre cas sont possibles :

i) Si $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires, alors $\vec{\mathscr{D}_1} = \vec{\mathscr{D}_2}$. On dit que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont **parallèles**. De plus, elles sont incluses dans un même plan, et :
- Soit $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \varnothing$.
- Soit $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \neq \varnothing$. On a alors $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$: elles sont **confondues**.

ii) Si $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.
- Soit $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \varnothing$ et ne sont incluses dans aucun plan commun.
- Soit $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \neq \varnothing$. Elles sont incluses dans un même plan et les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont un unique point d'intersection. On dit qu'elles sont **sécantes**.

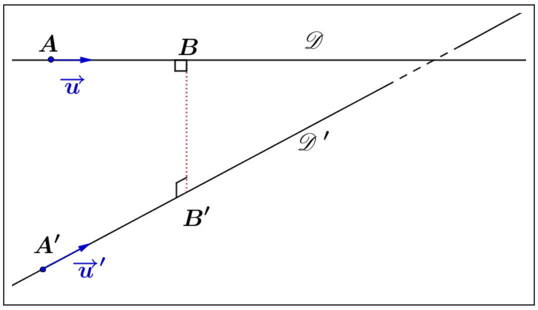
Définition 7.4

i) *Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont dites **orthogonales** lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Cela sera noté $\mathscr{D} \perp \mathscr{D}'$.*

ii) *Deux droites sont dites **perpendiculaires** lorsqu'elles sont orthogonales et sécantes.*

iii) *Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont dits **orthogonaux** lorsque vecteurs normaux sont orthogonaux. Cela sera noté $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}'$.*

Théorème 7.5 (*Perpendiculaire commune à deux droites*)
*Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. Alors il existe une unique droite Δ qui soit simultanément perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, et celle-ci est dirigée par $\vec{u} \wedge \vec{u}'$. Cette droite est appelée la **perpendiculaire commune** à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.*



Exemple 7.6
On se place dans un repère orthonormé direct. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que les droites $\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = az - 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ et $\mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3z - 1 \end{cases}$ Soit coplanaires. Déterminer, lorsque c'est possible une équation cartésienne de la perpendiculaire commune aux deux droites.

Remarque 7.7
Il existe également une perpendiculaire commune à deux droites parallèles, mais dans ce cas on perd l'unicité (et aucune perpendiculaire commune n'est dirigée par $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ puisque ce vecteur est nul). Pour calculer l'équation de cette droite, on pourra se placer dans un plan contenant les deux droites, et chercher dans celui-ci un vecteur normal à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

8 Projection orthogonale et calcul de distances

Définition 8.1

Soit A un point et $\mathscr{A}$ une partie non vide de l'espace. On appelle **distance** *de A à $\mathscr{A}$ la quantité :* $\mathrm{d}(A, \mathscr{A}) = \inf_{M \in \mathscr{A}} AM$.

Remarque 8.2

Plus généralement, si $\mathscr{B}$ est une autre partie non vide de l'espace, alors on appelle **distance** de $\mathscr{A}$ à $\mathscr{B}$ la quantité : $\mathrm{d}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \inf_{A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}} AB$.

Théorème et définition 8.3

Soit A un point. Si $\mathscr{H}$ est un plan ou une droite, il existe un unique point H vérifiant :

$$H \in \mathscr{H} \quad \text{et} \quad \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{H}},\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u} = 0.$$

On appelle ce point H le **projeté orthogonal** *de A sur $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{D}$).*

Théorème 8.4 (*Distance d'un point à un plan*)

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$, $\mathscr{H}$ un plan ou une droite et $B \in \mathscr{H}$. On considère H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{H}$. On a $\mathrm{d}(A, \mathscr{P}) = AH$.

Exemple 8.5

Déterminer des formules pour la distance d'un point à un plan et d'un point à une droite dans l'espace.

Exemple 8.6

Déterminer la distance entre $A(1, 1, -1)$ et $(\mathscr{P}) : x + y - z + 1 = 0$ puis la distance entre A et la droite $\mathscr{D}$ passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, 1, 1)$.

9 Sphères

Définition 9.1

Soit $\Omega \in \mathscr{E}$ et $r \geqslant 0$. On appelle **sphère** *de centre Ω et de rayon r l'ensemble :* $\mathscr{S}(\Omega, r) = \{M \in \mathscr{E} \mid \Omega M = r\}$.

Théorème 9.2 (*Équation cartésienne d'une sphère*)

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega) \in \mathscr{E}$ et $r \geqslant 0$. La sphère $\mathscr{S}(\Omega, r)$ admet pour équation cartésienne :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2.$$

Exemple 9.3

On considère, dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la sphère de centre O et de rayon 1 et la sphère de centre Ω de coordonnées $(2, 0, 0)$ et de rayon $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer en fonction du paramètre a les différents types d'intersections entre ces deux sphères.

Remarque 9.4

De façon analogue au cas des cercles en dimension 2,si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des réels et $\mathscr{S}$ la partie de l'espace d'équation cartésienne :

$$\mathscr{S} : x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0$$

alors on a deux cas possibles :

i) Si $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta \geqslant 0$, alors $\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ et de rayon $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$.

ii) Sinon, $\mathscr{S} = \varnothing$.