Chapitre D1 : Géométrie du plan

Les notions suivantes de géométrie seront supposées connues dans ce chapitre : calcul vectoriel, distance et norme euclidiennes, orthogonalité, orientation, angles et angles orientés.

1 Généralités

Nous ne pouvons pas définir précisément ce qu'est un espace affine à ce stade de l'année. Retenons toutefois qu'un espace affine est un ensemble $\mathscr{E}$ dont les éléments sont appelés points. La donnée de deux points A et B de $\mathscr{E}$ détermine un unique vecteur $\overrightarrow{AB}$. Notons $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{E}$. On dit que $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ est la direction de $\mathscr{E}$. $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ est un espace vectoriel : on peut ajouter deux vecteurs, et multiplier un vecteur par un scalaire réel.

Définition 1.1

*Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{E}$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.*

Les points, les droites, les plans et l'espace usuel sont des espaces affines. Pour le moment, on peut utiliser la définition suivante :

Définition 1.2

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine.

i) On dit que $\mathscr{E}$ est une droite affine s'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{\imath}$ tel que :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}},\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{\imath}.$$

Dans ce cas, on dit que $\overrightarrow{\imath}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{E}$, ou que $(\overrightarrow{\imath})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

ii) On dit que $\mathscr{E}$ est un plan affine s'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ non colinéaires tels que :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}},\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{\imath} + \mu \overrightarrow{\jmath}.$$

Dans ce cas, on dit que $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

Proposition 1.3

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{E}$. Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Cette proposition motive la définition plus générale suivante, sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre sur les espaces vectoriels.

Définition 1.4

Soit $(\overrightarrow{u_k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de $\mathscr{E}$.

*i) On dit que $(\overrightarrow{u_k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille **libre** si :*

$$\forall (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0 \right].$$

*ii) On dit que $(\overrightarrow{u_k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille **liée** si elle n'est pas libre.*

Exemple 1.5
Donner une condition simple pour qu'une famille constituée d'un seul vecteur $(\overrightarrow{u_1})$ soit libre et une condition simple pour qu'une famille constituée de deux vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ soit libre.

Nous démontrerons plus tard les résultats suivants :

i) les familles libres de vecteurs appartenant à une même droite contiennent au plus un vecteur ;

ii) les familles libres de vecteurs du plan contiennent au plus deux vecteurs ;

iii) les familles libres de vecteurs de l'espace contiennent au plus trois vecteurs.

Pour ces raisons, on dira que les droites sont de dimension 1, les plans sont de dimension 2, et l'espace usuel est de dimension 3.

2 Coordonnées cartésiennes

Dans toute la suite de ce chapitre, on considère un plan affine $\mathscr{P}$.

Définition 2.1

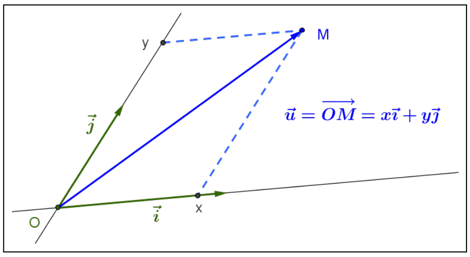
On appelle repère cartésien du plan affine $\mathscr{P}$ tout triplet $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ où O est un point appelé origine et où $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est une base du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Théorème et définition 2.2

Soient $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère cartésien du plan.

i) Pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathscr{P}$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}$ qu'on appelle ***coordonnées cartésiennes*** *du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{R}$. x est l'**abscisse** de $\overrightarrow{u}$ et y son **ordonnée**.*

ii) On appelle ***coordonnées cartésiennes*** *du point M dans $\mathcal{R}$ les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$.*



Théorème 2.3

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère cartésien du plan. Soient A et B deux points de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B).

iii) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

iv) Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

3 Changement de repère cartésien

Dans cette section, on considère deux bases du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Nous allons établir une relation permettant de calculer les coordonnées d'un vecteur dans une de ces base, connaissant ses coordonnées dans l'autre base. Pour cela, on introduit des notations matricielles.

Définition 3.1

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ une base et $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. On notera $[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}}$ la matrice colonne à deux lignes constituée des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, si $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$, alors :

$$[\overrightarrow{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Définition 3.2

Soient $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ deux bases de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. On notera $P_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ la matrice carré de taille 2 dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ dans la base $\mathcal{B}'$. On dit que $P_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Autrement dit, si on a $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\overrightarrow{\imath} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\jmath} = c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v}$, alors :

$$P_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.3

Soit $\overrightarrow{z}$ un vecteur du plan. Soient (x, y) les coordonnées de $\overrightarrow{z}$ dans $\mathcal{B}$ et (x', y') ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$. On a :

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy. \end{cases} \quad \text{ce qui s'écrit} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ou encore, en introduisant les notations : $[\overrightarrow{z}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[\overrightarrow{z}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: $[\overrightarrow{z}]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\,[\overrightarrow{z}]_{\mathcal{B}}$.

Remarque 3.4

On peut adapter le résultat précédent au cas des points. Soient $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ deux repères du plan. On note aussi $P_{\mathcal{R}'\leftarrow\mathcal{R}} = P_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$, la matrice de passage du repère $\mathcal{R}'$ au repère $\mathcal{R}$, $[O]_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} x'_O \\ y'_O \end{pmatrix}$ les coordonnées du point O dans le repère $\mathcal{R}'$ et M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ et (x', y') dans $\mathcal{R}'$. On a :

$$\begin{cases} x' = ax + cy + x'_O \\ y' = bx + dy + y'_O. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_O \\ y'_O \end{pmatrix}$$

ou encore en posant : $[M]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $[M]_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: $[M]_{\mathcal{R}'} = P_{\mathcal{R}'\leftarrow\mathcal{R}}\,[M]_{\mathcal{R}} + [O]_{\mathcal{R}'}$.

Exemple 3.5

Soient $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{\imath} - 3\overrightarrow{\jmath}$ et M le point de coordonnées $(-3, 1)$ dans le repère $\mathcal{R}_2 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Calculer les coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}_1$.

4 Produit scalaire

On rappelle que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ du plan sont orthogonaux si et seulement si l'un des deux est nul ou l'angle entre eux est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Cette propriété sera notée $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Définition 4.1

Soit $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère cartésien du plan.

*i) On dit que $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est une base **orthonormale** si $\overrightarrow{\imath} \perp \overrightarrow{\jmath}$ et $\|\overrightarrow{\imath}\| = \|\overrightarrow{\jmath}\| = 1$.*

*ii) On dit que $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est un repère **orthonormal** si $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est une base orthonormale.*

Dans la suite de cette section, $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ désigne un repère orthonormé du plan.

Définition 4.2

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, le réel :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) & \textit{si } \overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 4.3
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, on a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Proposition 4.4

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0 \iff \overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$

Théorème 4.5

Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$; et z_1, z_2 les affixes associés. On a : $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2} = \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\overline{z_1}z_2\right) = x_1x_2 + y_1y_2$.

On peut en déduire les propriétés élémentaires du produit scalaire.

Théorème 4.6

i) Le produit scalaire est une forme bilinéaire : pour tous réels λ_1 et λ_2 et tous vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2})\cdot\overrightarrow{v_1} &= \lambda_1(\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{v_1}) + \lambda_2(\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{v_1}) \\ \overrightarrow{u_1}\cdot(\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}) &= \lambda_1(\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{v_1}) + \lambda_2(\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{v_2}) \end{aligned}$$

ii) Le produit scalaire est symétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$.

iii) Le produit scalaire est défini positif : pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} \geqslant 0$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Théorème 4.7

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On a

$$\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\imath})\,\overrightarrow{\imath} + (\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\jmath})\,\overrightarrow{\jmath}.$$

Théorème 4.8

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

i) $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\times\|\overrightarrow{u}\|$;

ii) $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$ *(Formule d'Al-Kashi) ;*

iii) $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$;

iv) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$;

v) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$ *(Formule de polarisation) ;*

vi) $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = 2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$ *(Identité du parallélogramme).*

Exemple 4.9
On considère trois points A, B, C du plan de coordonnées respectives $(-4, 1)$, $(-2, 2)$, $(0, c)$ où c est un réel. A quelle condition sur c, ABC est-il rectangle ?

Théorème 4.10 (*Inégalité triangulaire*)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors :

i) $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|$,

ii) $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|$ *si et seulement si il existe* $\lambda \geqslant 0$ *tel que* $\overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{v}$ *ou* $\overrightarrow{v}=\lambda\overrightarrow{u}$,

iii) $|\,\|\overrightarrow{u}\|-\|\overrightarrow{v}\|\,| \leqslant \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$.

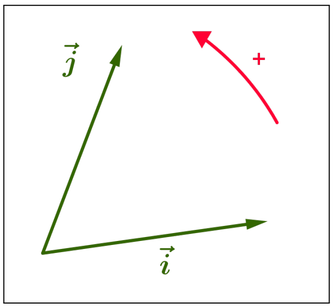
5 Produit mixte ou déterminant

La figure ci-contre rappelle quelle convention est adoptée classiquement en matière d'orientation du plan. On dit alors que :

i) La base $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ est directe.

ii) La base $(\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{\imath})$ est indirecte.

On dira que le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ est direct (resp. indirect) si la base $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ associée l'est.



Dans la suite de cette section, on supposera que le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ est orthonormé direct.

Définition 5.1

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle **produit mixte** *de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le réel, noté $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$, et défini par :*

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=\begin{cases}\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \text{si } \overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Remarque 5.2

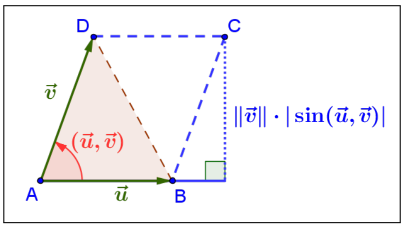
Nous verrons plus tard dans l'année que le produit mixte est un cas particulier de déterminant.

Théorème 5.3

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et A, B, C, D des points du plans tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Alors :

i) L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égal à $|[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]|$;

ii) L'aire du triangle ABD est égal à $\dfrac{1}{2}\,|[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]|$.



Théorème 5.4

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

i) $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=0$ *si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ;*

ii) $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]>0$ *si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base directe ;*

iii) $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]<0$ *si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base indirecte.*

Remarque 5.5

Soient $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x_1,y_1) et (x_2,y_2) dans le repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ et z_1, z_2 les affixes associés. On a : $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=\mathcal{I}\mathrm{m}\,(\overline{z_1}z_2)=x_1y_2-y_1x_2$.

Notation 5.6

Soient x_1, x_2, y_1, y_2 des réels. La quantité $x_1y_2 - y_1x_2$ sera notée $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$.

Exemple 5.7

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y) dans une base orthonormée directe. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{v}$ de sorte que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit une base orthonormale orientée dans le sens direct.

Théorème 5.8

i) *Le produit mixte est une forme bilinéaire : pour tous réels λ_1, λ_2 et tous vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, alors :*

$$\left[\left(\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2}\right), \overrightarrow{v_1}\right] = \lambda_1\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}\right] + \lambda_2\left[\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_1}\right]$$
$$\left[\overrightarrow{u_1}, \left(\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}\right)\right] = \lambda_1\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1}\right] + \lambda_2\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_2}\right]$$

ii) *Le produit mixte est antisymétrique : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$: $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$.*

6 Coordonnées polaires

On considère ici un repère orthonormé direct du plan $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Sauf mention contraire, les coordonnées seront prises dans ce repère.

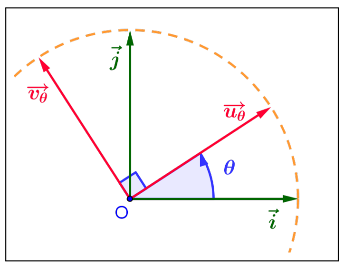
Proposition et définition 6.1

Soit θ un réel. On pose :

$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath}$$
$$\overrightarrow{v_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{\jmath}.$$

Le repère $\mathcal{R}_\theta = (O, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$ est un repère orthonormé direct et

$$\overrightarrow{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_\theta} - \sin\theta\overrightarrow{v_\theta}$$
$$\overrightarrow{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_\theta} + \cos\theta\overrightarrow{v_\theta}$$



Remarque 6.2

Si les coordonnées de $\overrightarrow{a}$ sont (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$ et (x', y') dans le repère $\mathcal{R}_\theta$, alors :

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Définition 6.3

Soit M un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. On appelle couple de coordonnées polaire de M (resp. de $\overrightarrow{u}$) relativement au repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ tout couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\theta}$ (resp. $\overrightarrow{u} = \rho\overrightarrow{u_\theta}$).

Proposition 6.4

Soit M un point du plan.

i) Si $M \neq O$ et si (ρ, θ) est un couple de coordonnées polaires de M alors :

- *soit $\rho = OM$ et $\theta \equiv \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) [2\pi]$,*
- *soit $\rho = -OM$ et $\theta \equiv \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) + \pi\, [2\pi]$.*

ii) Dans tous les cas, les coordonnées cartésiennes (x, y) du point M vérifient $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

iii) Réciproquement, si M a pour coordonnées cartésiennes (x, y) avec $x \neq 0$ alors (ρ, θ) est un couple de coordonnées polaires pour M avec $\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$ et :

$$\rho = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{si } x > 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Remarque 6.5

(ρ, θ) est un couple de coordonnées polaires de M si et seulement si l'affixe de M est $\rho e^{i\theta}$ et tous les couples $(0, \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ sont des coordonnées polaires du point O.

Exemple 6.6

Déterminer les coordonnées polaires du point A de coordonnées $(1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

7 Droites

7 a) Généralités

Définition 7.1

Soient $A \in \mathscr{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. La droite qui passe par A et qui est dirigée par $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points $M \in \mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

Définition 7.2

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.

i) On note $\overrightarrow{\mathscr{D}}$ l'ensemble des vecteurs formés par les points de $\mathscr{D}$ et si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{D}}$ est non nul, on dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, où que $(\overrightarrow{u})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{D}}$.

ii) Un repère de $\mathscr{D}$ est un couple $(A, \overrightarrow{u})$ où $A \in \mathscr{D}$ et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

iii) Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur non nul du plan tel que $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{D}}$, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0$, on dit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal de $\mathscr{D}$.

Notations 7.3

Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et $\mathscr{D}$ la droite dirigée par $\overrightarrow{u}$ passant par A.

i) La notation $A + \overrightarrow{u}$ désigne le point B, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

ii) La notation $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})$ désigne l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$. On a donc $\overrightarrow{\mathscr{D}} = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})$.

iii) La droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des images de A par des translations de vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$. Autrement dit, $\mathscr{D} = \{A + \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v} \in \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})\}$. On notera donc $\mathscr{D} = A + \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})$.

Remarque 7.4
Il convient d'être prudent avec l'écriture $B = A + \overrightarrow{u}$, puisque celle-ci désigne la « somme » de deux objets de natures différentes : un point et un vecteur. On ne donnera aucune règle de calcul associée à cette opération, qu'il ne faudra donc pas considérer comme « une somme » au sens usuel du terme. En pratique cette notation est utilisée pour donner des résultats de manière synthétique, mais pas pour faire des calculs. On peut par exemple noter que les expressions $B = \overrightarrow{u} + A$ ou $B = A + C$ n'ont a priori aucun sens.

Théorème 7.5 (*Représentation paramétrique d'une droite*)

Soit $\mathscr{D}$ une droite qui passe par $A(x_A, y_A)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a, b)$. Pour tout point $M(x, y)$:

$$M \in \mathscr{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases}$$

Proposition 7.6 (*Équation cartésienne d'une droite*)

i) Toute droite possède une équation cartésienne de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

ii) Réciproquement, toute équation cartésienne de ce type décrit une droite, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-\beta, \alpha)$. Si de plus, le repère est orthonormé, alors cette droite admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta)$.

Exemple 7.7
Soient $\mathcal{R}$ un repère du plan, $A(1, 1)$ et $B(-1, -1)$ deux points. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) et montrer que celle-ci passe par l'origine du repère.

Exemple 7.8
Donner une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(1, 2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(-1, 3)$, dans un repère orthonormé direct.

Exemple 7.9
Soient A et B deux points distincts. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Théorème 7.10

Soient $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{D}'$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$.

i) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{\mathscr{D}} = \overrightarrow{\mathscr{D}'}$. On dit que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont ***parallèles*** *(éventuellement* ***confondues****).*

ii) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires, alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont alors un unique point d'intersection. On dit que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont ***sécantes****.*

Théorème 7.11

Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$. On a :

$$\mathscr{D}//\mathscr{D}' \iff \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0.$$

Remarques 7.12

i) Le résultat ci-dessus est vrai dans un repère quelconque. Dans un repère orthonormé direct, on utilisera le produit mixte plutôt que le déterminant.

ii) Abstraction faite de toute considération géométrique, on peut démontrer qu'un système de la forme $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ possède une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Exemple 7.13

On appelle demi-plan, toute partie $\mathscr{U}$ du plan $\mathscr{P}$ délimitée par une droite $\mathscr{D}$. On dira que $\mathscr{U}$ est fermé (resp. ouvert) si $\mathscr{D} \subset \mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{D} \subset \mathscr{P} \setminus \mathscr{U}$). Soient A le point de coordonnées $(1,2)$ et $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(2,-1)$ dans un repère orthonormé direct. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$. Il est clair que le point O n'est pas sur $\mathscr{D}$. On considère donc $\mathscr{U}$ le demi-plan ouvert délimité par $\mathscr{D}$ qui contient O. Soit M un point de coordonnées (x,y). A quel condition sur x,y, M est-il dans $\mathscr{U}$?

7 b) Distance d'un point à une droite

Définition 7.14

Soit $\mathscr{U}$ une partie non vide du plan et A un point. On note $\mathrm{d}(A,\mathscr{U})$ la borne inférieure des distances entre A et un point de $\mathscr{U}$ $\mathrm{d}(A,\mathscr{U}) = \inf_{M\in\mathscr{U}} AM$.

Théorème et définition 7.15

Soient $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $A(x_A,y_A)$ un point du plan. Il existe un unique point H tel que $H \in \mathscr{D}$ et $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u}$ et H est alors appelé le **projeté orthogonal** *de A sur $\mathscr{D}$.*

Théorème 7.16

Soient $\mathscr{D}$ une droite et $A(x_A,y_A)$ un point. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, $(B,\overrightarrow{u})$ un repère de $\mathscr{D}$, $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ dans un repère orthonormé et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{D}$. On a :

$$\mathrm{d}(A,\mathscr{D}) = AH = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{BA}\right]\right|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BA}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|\alpha x_A+\beta y_A+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

8 Cercles

On considère ici un repère orthonormé du plan $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Définition 8.1

Soient $A(x_A, y_A)$ un point et $r \geqslant 0$. Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = r$.

Théorème 8.2

i) Le cercle de centre A et de rayon r admet pour équation cartésienne : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = r^2$.

ii) Tout cercle possède une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma \geqslant 0$.

iii) Réciproquement, toute équation de ce type décrit un cercle.

Exemple 8.3

Montrer que l'équation $x^2 + y^2 + 2x + \frac{1}{2}y + \frac{9}{16} = 0$ est celle d'un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

Théorème 8.4 (*Représentation paramétrique trigonométrique d'un cercle*)

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon $r > 0$. Alors pour tout point $M(x, y)$:

$$M \in \mathscr{C} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + r\cos\theta \\ y = y_A + r\sin\theta \end{cases}$$

Théorème 8.5

Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple 8.6

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A de coordonnées $(1, 0)$ et de rayon 1. A quelle condition, la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ coupe-t-elle ce cercle ?

Exemple 8.7

Soient $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon r et $\mathscr{C}'$ le cercle de centre $A' \neq A$ et de rayon r'. Montrer que si $AA' > r + r'$ ou $AA' < |r - r'|$, alors les cercles ne se coupent pas.