Chapitre C4: Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

La définition suivante généralise la notion de vecteur. Cela donne une définition abstraite des propriétés que doit vérifier un ensemble pour être étudié à la manière de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire en utilisant les techniques issues de la géométrie.

Définition 1.1

*On appelle $\mathbb{K}$-**espace vectoriel**, tout triplet $(E,+,\cdot)$ où E est un ensemble, et $+$ et $\cdot$ sont deux applications :*

— *l'application $+$ est une loi de composition interne sur E :* $+ : \left\{ \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array} \right.$

— *l'application $\cdot$ est une loi de composition externe :* $\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,u) & \longmapsto & \lambda\cdot u \end{array} \right.$

qui vérifient les propriétés suivantes.

i) *$+$ est associative :* $\forall (u,v,w)\in E^3,\ (u+v)+w = u+(v+w)$.

ii) *$+$ est commutative :* $\forall (u,v)\in E^2,\ u+v = v+u$.

iii) *$+$ admet un élément neutre : il existe un vecteur de E (nécéssairement unique), appelé* **vecteur nul** *et noté 0_E, qui vérifie :* $\forall u\in E,\ u+0_E = u = 0_E+u$.

iv) *Tout vecteur $u\in E$ possède un* **opposé** *$u'\in E$ qui vérifie : $u+u' = 0_E = u'+u$. L'opposé de u est nécessairement unique et sera noté $-u$.*

v) *Distributivité de $\cdot$:*

$$\forall (u,v)\in E^2,\ \forall \lambda\in\mathbb{K},\ \lambda\cdot(u+v) = \lambda\cdot u+\lambda\cdot v$$
$$\forall u\in E,\ \forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ (\lambda+\mu)\cdot u = \lambda\cdot u+\mu\cdot u$$

vi) $\forall u\in E,\ 1\cdot u = u$.

vii) $\forall u\in E,\ \forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda\cdot(\mu\cdot u) = (\lambda\times\mu)\cdot u$.

Notations 1.2

i) Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, et seront en général désignés par des lettres latines. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**, et sont en général désignés par des lettres grecques. Afin d'éviter toute confusion entre scalaires et vecteurs, on peut surmonter d'une flèche les lettres désignant des vecteurs (comme en géométrie).

ii) Pour éviter toute confusion avec le vecteur nul, le nombre $0\in\mathbb{K}$ peut être noté $0_{\mathbb{K}}$.

iii) On omettra le plus souvent le symbole $\cdot$, et on écrira λu au lieu de $\lambda\cdot u$.

iv) Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on dit que E est un espace vectoriel réel.

v) Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on dit que E est un espace vectoriel complexe.

vi) Lorsque la confusion n'est possible, on parle de l'espace vectoriel E au lieu du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

Exemples 1.3

i) En géométrie, l'ensemble $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ des vecteurs d'un espace affine $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Ses éléments sont en général notés avec une flèche.

ii) $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

iii) L'ensemble $(\{0_{\mathbb{K}}\}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\times$ définies sur $\mathbb{K}$, restreintes à $\{0_{\mathbb{K}}\}$.

iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$ définies, pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, par :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

v) Étant donné deux entiers $n, p > 0$, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

vi) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble quelconque. Alors E^X, l'ensemble des applications de X dans E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\forall f, g \in E^X,\ \forall x \in X,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\forall f \in E^X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X,\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x)).$$

Le vecteur nul de cet espace vectoriel est alors la fonction nulle $\left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0_E \end{array} \right.$.

vii) L'exemple précédent contient les cas particuliers suivants :

— Si $X = [\![1, n]\!]$, on retrouve la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

— Pour $X = \mathbb{N}$, $E^{\mathbb{N}}$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans E.

— Pour $X = I \subset \mathbb{R}$, et $E = \mathbb{K}$, $\mathbb{K}^I$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 1.4
Démontrer le point (iv) de l'exemple précédent.

Proposition 1.5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

i) $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$

ii) $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

iii) $\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad \textit{ou} \quad u = 0_E$

iv) $(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)$

Définition 1.6

Soient u et v deux vecteurs de E, on dit que u et v sont colinéaires si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u = \lambda v \quad \textit{ou} \quad v = \lambda u.$$

Remarques 1.7

i) Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs de E car $\forall u \in E,\ 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$.

ii) Si u est un vecteur non nul, alors v est colinéaire à u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$.

2 Familles de vecteurs

2 a) Généralités

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On rappelle la notion de famille déjà connue.

Définition 2.1

i) *On appelle* ***famille de vecteurs*** *de E indexée par un ensemble I, la donnée pour tout $i \in I$ d'un vecteur u_i de E. On note alors $(u_i)_{i\in I}$ cette famille.*

ii) *Si I est un ensemble fini, on dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est finie et dans le cas particulier où $I = [\![n, p]\!]$, avec $n, p \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant p$, on note aussi $(u_i)_{n\leqslant i\leqslant p}$ cette famille.*

Remarque 2.2
Une famille de vecteurs de E indexés par I est une application de I vers E. Ainsi l'ensemble des familles de vecteurs de E indexés par I est E^I et une famille peut contenir plusieurs fois le même vecteur.

2 b) Familles génératrices finies

Définition 2.3

Soit x un vecteur de E et $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E.

i) *On dit que x est une combinaison linéaire des $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

ii) *On dit que la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une* ***famille génératrice*** *si tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.*

Exemple 2.4

1. Montrer que $\big((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. La famille $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ est-elle génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?
3. On admet que l'ensemble E des fonctions affines est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire des fonctions. Justifier que la famille $(x \mapsto x - 1, x \mapsto x - 2)$ est une famille génératrice de E.

2 c) Familles libres finies

Définition 2.5

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une ***famille libre*** *ou que ses vecteurs sont* ***linéairement indépendants*** *si :*

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \ \Rightarrow \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}\right].$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est ***liée****.*

Exemple 2.6
Les vecteurs $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$ et $(2, 1, 2)$ forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

Exemple 2.7
On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^2$ et les vecteurs $x = (a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $y = (c, d) \in \mathbb{K}^2$. Montrer que (x, y) est une famille libre de $\mathbb{K}^2$ si, et seulement si $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Exemple 2.8
Déterminer dans chaque cas si la famille $\mathscr{F}$ est libre ou liée dans l'espace E considéré :

1. $\mathscr{F} = ((1, 0, 0), (1, 1, 1))$ et $E = \mathbb{R}^3$;
2. $\mathscr{F} = ((1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1))$ et $E = \mathbb{R}^3$;
3. $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_2\right)$ et $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$;
4. $\mathscr{F} = ((n), (e^n))$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
5. $\mathscr{F} = (\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \exp)$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.9

i) *Une famille a un seul élément (u_1) est libre si et seulement si $u_1 \neq 0_E$.*
ii) *Deux vecteurs u_1 et u_2 sont colinéaires si, et seulement si la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant 2}$ est liée.*
iii) *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*

Exemples 2.10

i) Les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ sont non colinéaires : ils forment une famille libre.
ii) De même, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$, $(x \mapsto \cos(\omega x), x \mapsto \sin(\omega x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Théorème 2.11

i) *Une famille finie de vecteurs est liée si et seulement si l'un (au moins) de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*
ii) *Soient $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille libre de vecteurs de E, et $u_{n+1} \in E$. La famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ est liée si et seulement si u_{n+1} est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.*

Remarque 2.12
Il est erroné de penser qu'une famille est liée si et seulement si tout vecteur de celle-ci est combinaison linéaire des autres : pour le voir il suffit par exemple de considérer une famille de deux vecteurs dont l'un seulement est nul.

Proposition 2.13
Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille libre de vecteurs de E. Si x s'écrit comme une combinaison linéaire des $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, alors :

$$\exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

2 d) Bases finies

Définition 2.14
Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une **base** *de E si c'est à la fois une famille libre et génératrice.*

Proposition et définition 2.15

Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. La famille $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

Dans ce cas, les coefficients $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ seront appelés ***coordonnées*** *du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$. On notera alors :*

$$[x]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.16
Les bases sont les familles de vecteurs pour lesquelles il existe une notion de coordonnées. L'existence de celles-ci correspond au caractère générateur, et leur unicité à la liberté.

Exemple 2.17
Soit $E = \mathbb{K}^2$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{K}^2$.

Exemples 2.18

i) Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{K}^n$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère le vecteur suivant de $\mathbb{K}^n$:

$$e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1 \text{ zéros}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i \text{ zéros}}).$$

Autrement dit, $e_1 = (1, 0 \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, 0)$, et $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. De la même manière, on montre que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{K}^n$; c'est donc une base de $\mathbb{K}^n$. On l'appelle **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

ii) Soient $n, p > 0$ des entiers. On rappelle que $E_{i,j}$ désigne la matrice de taille $n \times p$ dont tous les termes sont nuls, sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1. Alors la famille formée des matrices $E_{i,j}$, avec $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On l'appelle **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.19
On admet que l'ensemble S des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire des fonctions. Déterminer une base de S.

Exemple 2.20
On admet que l'ensemble des solutions du système linéaire d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$ est un espace vectoriel (avec les mêmes opérations que pour les vecteurs de $\mathbb{R}^3$). Déterminer une base de cet espace.

2 e) Familles non finies

Définition 2.21

Une ***sous-famille*** *d'une famille $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E indexée par I est une famille de la forme $\mathscr{F}' = (u_j)_{j\in J}$ où J est une partie de I. On dit aussi que $\mathscr{F}$ est une* ***sur-famille*** *de $\mathscr{F}'$.*

On peut ainsi définir la notion de famille génératrice et de base pour une famille quelconque de vecteurs. Dans la définition suivante, $\mathcal{P}_f(I)$ désigne l'ensemble des parties finies de I.

Définition 2.22

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que :

i) La famille $\mathscr{F}$ est libre si toute sous-famille finie de $\mathscr{F}$ est libre, c'est-à-dire si :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I),\ \forall(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J,\ \left[\sum_{j\in J} \lambda_j u_j = 0_E \ \Rightarrow\ \forall j \in J,\ \lambda_j = 0_{\mathbb{K}}\right].$$

ii) La famille $\mathscr{F}$ est génératrice si tout vecteur x de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de la famille $\mathscr{F}$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E,\ \exists J \in \mathcal{P}_f(I),\ \exists(\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J,\ x = \sum_{j\in J} \lambda_j u_j.$$

iii) La famille $\mathscr{F}$ est une base de E si c'est à la fois une famille libre et génératrice.

Proposition 2.23

On a les résultats suivants :

i) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

ii) Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

iii) Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Remarque 2.24

Attention, en aucun cas on ne peut écrire une somme d'un nombre infini de vecteurs ou de nombres réels. Ces objets mathématiques, appelés séries, seront étudiés en détail à la fin de l'année.

Exemple 2.25

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante. Montrer que la famille $(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_i x})_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

3 Sous-espaces vectoriels

3 a) Généralités

Définition 3.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un ***sous-espace vectoriel*** *de E est une partie F de E telle que :*

i) $0_E \in F$;

ii) F est stable par la loi $+$: $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$;

iii) F est stable par la loi $\cdot$: $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda u \in F$.

Remarque 3.2

Par récurrence immédiate, toute combinaison linéaire de vecteurs de F appartient à F. On dit que F est stable par combinaison linéaire.

Théorème 3.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F, muni des lois $+$ et $\cdot$ restreintes à F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 3.4 (*Caractérisation des sous-espaces vectoriels*)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :

i) $0_E \in F$;

ii) *F est stable par combinaison linéaire :* $\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda u + \mu v \in F$.

Exemples 3.5

i) Montrer que $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

ii) Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que $\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Ce résultat est-il encore vrai lorsque $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \mu \neq 0$?

Méthode 3.6

En pratique, pour vérifier qu'un ensemble est un espace vectoriel, on n'utilise jamais la définition 1.1. En effet, tous les espaces vectoriels que vous rencontrerez dans des exercices seront en fait des sous-espaces vectoriels de l'un des espaces de référence étudiés en classe : il suffira donc de vérifier les trois conditions de la caractérisation précédente.

Exemple 3.7

Montrer l'ensemble, noté V, des solutions de l'équation différentielle $y'' = y$ est un espace vectoriel pour les opérations sur les fonctions.

Exemple 3.8

Déterminer dans chaque cas si l'ensemble V est un sous-espace vectoriel de E (pour les opérations habituelles sur E) et, si oui, le démontrer :

1. $V = \left\{(x, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1 \text{ et } 2x + 2y = 0\right\}$ et $E = \mathbb{R}^3$;
2. $V = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $E = \mathbb{R}^3$;
3. $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\right\}$ et $E = \mathbb{R}^3$;
4. $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$ et $E = \mathbb{R}^3$;
5. $V = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ et $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;
6. V est l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
7. V est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ valant 1 en 0 et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
8. $V = \left\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} - u_n = 0\right\}$ et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3 b) Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème 3.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

i) *Si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.*

ii) *Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque 3.10
On considère $D_1 = \{\lambda(1,0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $D_2 = \{\mu(0,1) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. $D_1 \cup D_2$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

3 c) Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition 3.11

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie de E. ***Le sous-espace vectoriel engendré par*** *X, noté $\operatorname{Vect} X$, est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X :*

$$\operatorname{Vect} X = \bigcap_{\substack{X \subset F \subset E \\ F \text{ sous-espace vectoriel de } E}} F.$$

Théorème 3.12

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X une partie de E.

i) *Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $X \subset F$, alors $\operatorname{Vect} X \subset F$. Cela signifie que $\operatorname{Vect} X$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient X.*

ii) *$\operatorname{Vect} X$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X :*

$$\operatorname{Vect} X = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \right\}.$$

Exemples 3.13

i) Soit $u \in E$, tel que $u \neq 0_E$. $\mathscr{D} = \operatorname{Vect}\{u\}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à u :

$$\mathscr{D} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\},$$

et la famille (u) est une base de $\mathscr{D}$. On dit que $\mathscr{D}$ est la **droite vectorielle** de E dirigée par u.

ii) Soit u et v deux vecteurs non colinéaires de E et $\mathscr{P} = \operatorname{Vect}\{u, v\}$. L'ensemble

$$\mathscr{P} = \left\{ \lambda u + \mu v \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\},$$

et la famille (u, v) est une base de $\mathscr{P}$. On dit que $\mathscr{P}$ est le **plan vectoriel** de E dirigé par les vecteurs u et v.

iii) Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme une combinaison linaires des u_i :

$$\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \;\middle|\; (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

Proposition 3.14

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On note $\operatorname{Vect} \mathscr{F}$ le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\{u_i \mid i \in I\}$.

i) *La famille $\mathscr{F}$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect} \mathscr{F}$.*

ii) *Si la famille $\mathscr{F}$ est libre, alors c'est une base du sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect} \mathscr{F}$.*

iii) *La famille $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E si et seulement si $\operatorname{Vect} \mathscr{F} = E$.*

Remarque 3.15
L'espace vectoriel engendré par l'ensemble vide est l'espace nul : $\operatorname{Vect} \varnothing = \{0_E\}$.

Proposition 3.16

Soient X, Y deux parties d'un espace vectoriel E. Alors :

i) *Si $X \subset Y$ alors $\operatorname{Vect} X \subset \operatorname{Vect} Y$.*

ii) $\operatorname{Vect} X = \operatorname{Vect}(X \cup Y) \iff Y \subset \operatorname{Vect} X$.

Exemple 3.17

Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Justifier que $\operatorname{Vect}\{u, v, w\} = \operatorname{Vect}\{u, v\}$.

Proposition 3.18

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E et $\mathscr{B} = (u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de F. Alors :

$$F \subset G \iff \forall i \in I,\ u_i \in G.$$

Le théorème suivant et son corollaire seront très utiles en pratique. C'est une reformulation (et une généralisation au cas des familles non finies) du théorème 2.11.

Théorème 3.19

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. Alors :

i) *La famille $\mathscr{F}$ est liée si et seulement si il existe $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0} \in \operatorname{Vect}\{u_i \mid i \in I \setminus \{i_0\}\}$.*

ii) *Soit $v \in E$. Si $\mathscr{F}$ est libre, alors la famille obtenue à partir de $\mathscr{F}$ en ajoutant v est liée si et seulement si $v \in \operatorname{Vect} \mathscr{F}$.*

Corollaire 3.20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{L}_p = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E et u_{p+1} un vecteur de E. La famille $\mathscr{L}_{p+1} = (u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ est une famille libre si et seulement si $u_{p+1} \notin \operatorname{Vect} \mathscr{L}_p$.

3 d) Somme de sous-espaces vectoriels

Proposition et définition 3.21

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espace vectoriels de E. La **somme** *de F et G est le sous-espace vectoriel $F + G$ de E défini par :*

$$F + G = \{x \in E \mid \exists (y, z) \in F \times G,\ x = y + z\}.$$

Proposition 3.22

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espace vectoriels de E. Alors :

$$F + G = \operatorname{Vect}(F \cup G).$$

Exemple 3.23

Justifier que

$$\{(x, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{(1, 1)\} + \operatorname{Vect}\{(1, 2)\}.$$

Définition 3.24

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espace vectoriels de E. On dit que :

i) *F et G sont en* ***somme directe*** *si tout vecteur de $F+G$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$\forall x \in F+G,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G.$$

Dans ce cas, leur somme $F+G$ se note $F \oplus G$.

ii) *F et G sont* ***supplémentaires*** *si ils sont en somme directe et leur somme vaut E.*

Théorème 3.25

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espace vectoriels de E.

i) *F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.*

ii) *F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $F+G=E$.*

Proposition 3.26

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. Les espaces $\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}\,(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ sont en somme directe.

Exemple 3.27

Soient I une partie de $\mathbb{R}$ centrée en 0, F l'ensemble des fonctions paires de I vers $\mathbb{R}$ et G l'ensemble des fonctions impaires de I vers $\mathbb{R}$.

i) F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^I$.

ii) On a déjà vu que toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Cela signifie exactement que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^I$: $F \oplus G = \mathbb{R}^I$.

Exemple 3.28

Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (ensemble des matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (ensemble des matrices anti-symétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires.

Exemple 3.29

Soient $f_1 = (1,2)$ et $f_2 = (0,3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soient $D_1 = \mathrm{Vect}\,\{f_1\}$ et $D_2 = \mathrm{Vect}\,\{f_2\}$ les droites vectorielles engendrées par f_1 et f_2. Montrer que D_1 et D_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.30

Déterminer un sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^3$ tel que $\{(x,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1,1,0)) \oplus G$.

4 Applications linéaires.

4 a) Généralités

Cette partie introductive sera étudiée en détail dans un chapitre ultérieur.

Définition 4.1

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une ***application linéaire*** *est une application $\varphi : E \to F$ vérifiant :*

i) $\forall x,y \in E,\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; *ii)* $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$.

Proposition 4.2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On a :

i) $\varphi(0_E) = 0_F$;

ii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i)$.

Théorème 4.3 (*Caractérisation des applications linéaires*)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$. Alors φ est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y).$$

Définition 4.4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

i) *Une **forme linéaire** de E est une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$.*

ii) *Un **endomorphisme** de E est une application linéaire $\varphi : E \to E$.*

iii) *Un **isomorphisme** de E vers F est une application linéaire bijective $\varphi : E \to F$.*

iv) *Un **automorphisme** de E est un endomorphisme bijectif $\varphi : E \to E$.*

v) *On dira que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$.*

Notations 4.5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

— L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

— L'ensemble des formes linéaires de E est noté E^*. On a donc $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

— L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

— L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$.

Exemples 4.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

i) L'application identité de E, Id_E est un automorphisme de E.

ii) Soit $k \in \mathbb{K}^*$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & kx \end{array}\right.$ est un automorphisme de E, c'est l'**homothétie vectorielle** de rapport k. On la note $k\,\mathrm{Id}_E$.

iii) L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x - y \end{array}\right.$ est une forme linéaire.

iv) Soit I un intervalle véritable de $\mathbb{R}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}\right.$ est une application linéaire.

v) Soit X un ensemble, $a \in X$ et $E = \mathbb{K}^X$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de X vers $\mathbb{K}$. Alors l'application φ_a suivante est une forme linéaire, appelée morphisme d'évaluation en a.

$$\varphi_a : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}\right.$$

vi) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. L'application suivante est une forme linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

vii) Soient $n, p > 0$ des entiers. La transposition de matrices définit un isomoprhisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Théorème 4.7

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ deux applications linéaires. Alors :

i) *$\psi \circ \varphi : E \to G$ est une application linéaire. Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

ii) *Si φ est un isomorphisme, alors $\varphi^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme. Autrement dit, l'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.*

4 b) Noyau et image d'une application linéaire

Définition 4.8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $\varphi : E \to F$ une application linéaire.

i) *Le **noyau** de φ est l'ensemble* $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0_F\}$.

ii) *L'**image** de φ est l'ensemble* $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in E\}$.

Théorème 4.9

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Alors :

i) $\operatorname{Ker}\varphi$ *est un sous-espace vectoriel de E ;*

ii) $\operatorname{Im}\varphi$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Exemple 4.10

Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, x-z) \end{array} \right.$. Montrer que φ est une application linéaire, puis déterminer son noyau et son image.

Exemple 4.11

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y & \longmapsto & ay' + by \end{array} \right. .$$

φ est une application linéaire, et $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay' + by = 0$. Le théorème précédent montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Théorème 4.12

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $\varphi : E \to F$ une application linéaire.

i) *φ est une application linéaire injective si et seulement si* $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$.

ii) *φ est une application linéaire surjective si et seulement si* $\operatorname{Im}\varphi = F$.

iii) *φ est un isomorphisme si et seulement si* $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$ *et* $\operatorname{Im}\varphi = F$.