Chapitre C2 : Applications

Dans tout ce chapitre, les lettres E, F, G et H désigneront des ensembles.

1 Définitions

Intuitivement, une application de E dans F est un procédé permettant d'associer à tout élément x de E un unique élément y de F. Formellement, on a la définition suivante.

Définition 1.1

i) *On appelle* ***application*** *tout triplet d'ensembles $f = (E, F, \Gamma)$, tel que Γ est une partie de $E \times F$ qui vérifie :*

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x, y) \in \Gamma.$$

ii) *E est la* ***source*** *de f, appelé aussi* ***ensemble de départ*** *ou* ***ensemble de définition****.*

iii) *F est le* ***but*** *de f, appelé aussi* ***ensemble d'arrivée****.*

iv) *Γ est le* ***graphe*** *de f.*

v) *Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit alors que y est* ***l'image*** *de x par f et on note $y = f(x)$. On dit aussi que x est un* ***antécédent*** *de y par f.*

vi) *La fonction f se note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.*

vii) ***L'ensemble des applications*** *de E dans F est noté : $\mathscr{F}(E, F)$, ou F^E.*

Remarque 1.2
Soit $f : E \to F$ et $x \in E$. L'image de x par f est donc unique, mais un élément $y \in F$ peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent.

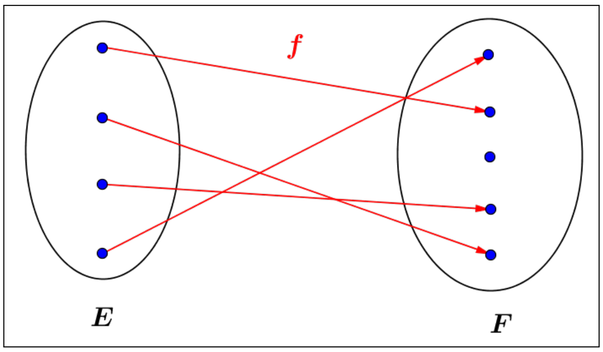

Fig 1.2.a - Ce dessin représente une application

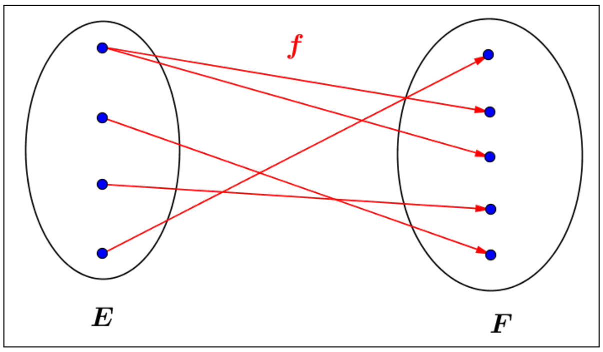

Fig 1.2.b - Ce dessin ne représente pas une application

Exemple 1.3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$. L'image de 2 par f est 4, et les antécédents de 4 par f sont 2 et -2. Par contre, -4 ne possède pas d'antécédents par f.

Remarque 1.4
Deux applications f et g sont égales, si, et seulement si :

- f et g ont même source E,
- f et g ont même but F,
- $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

On écrit alors $f = g$.

Définition 1.5

Pour tout ensemble E, on note Id_E l'application ***identité*** *de E définie par :*

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x. \end{array} \right.$$

Définition 1.6

Pour tout partie A de E, on note $\mathbb{1}_A$ l'application ***caractéristique*** *ou* ***indicatrice*** *de A, définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{array} \right.$$

Définition 1.7

Soient I et E deux ensembles. Une ***famille*** *d'élements de E indexée par I est une application de I dans E. On dit que I est l'ensemble des indices de cette famille.*

Notation 1.8
La famille $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ se note $(x_i)_{i \in I}$.

Remarques 1.9

i) $\mathscr{F}(\varnothing, F)$ est singleton, c'est à dire qu'il existe une unique application $\varnothing \to F$.

ii) $\mathscr{F}(E, \varnothing) = \left\{ \begin{array}{ll} \varnothing & \text{si } E \neq \varnothing \\ \{\mathrm{Id}_\varnothing\} & \text{si } E = \varnothing \end{array} \right.$

2 Restriction, prolongement

Définition 2.1

Soient $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F.

i) *La* ***restriction à la source*** *de f à A est l'application $f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right.$*

ii) *Si $\forall x \in E,\ f(x) \in B$, on peut définir la* ***restriction au but*** *de f à B comme étant l'application $f^{|B} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right.$*

Définition 2.2

*Soient A une partie de E, et $f : A \to F$. Toute application $\tilde{f} : E \to F$ telle que $\forall x \in A,\ \tilde{f}(x) = f(x)$ est appelée **prolongement** de f à E.*

Exemple 2.3
Rappeler les définitions des fonctions circulaires réciproques à l'aide de restrictions.

3 Composée de deux applications

Définition 3.1

*Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On note $g \circ f$ l'application **composée** de f et de g :*

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right. .$$

Proposition 3.2

Soit $f : E \to F$ une application. Alors :

i) $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ *ii)* $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.

Exemple 3.3
Déterminer une application f, autre que l'identité, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f \circ f$ est l'identité.

4 Image directe, image réciproque

Définition 4.1

Soient $f : E \to F$.

*i) Soit A une partie de E. On appelle **image directe** de A par f la partie de F, notée $f(A)$, constituée des images des éléments de A par f. C'est-à-dire :*

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$

*ii) On appelle **image** de f l'ensemble $f(E)$.*

*iii) Soit B une partie de F. On appelle **image réciproque** de B par f la partie de E, notée $f^{-1}(B)$ constituée des antécédents des éléments de B par f. C'est-à-dire :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Exemple 4.2

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, et soit $A = [-1, 4]$. Déterminer l'image directe de A par f, l'image réciproque de A par f.
2. On considère la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle est l'image directe, par sin, de $\mathbb{R}$? De $[0, 2\pi]$? de $[0, \pi/2]$? Quelle est l'image réciproque, par sin, de $[0, 1]$? de $[3, 4]$? de $\{1\}$? de $\{2\}$?

Remarque 4.3
La notation $f^{-1}(B)$ pour désigner l'image réciproque d'une partie de F n'a rien à voir avec l'application réciproque d'une application bijective. L'image réciproque d'une partie est toujours définie, mais lorsque l'application n'est pas bijective, tandis que l'application réciproque n'est définie que si l'application est bijective. Il ne faudra pas confondre les deux.

Définition 4.4

Soient E et F deux parties d'un même ensemble, et $f : E \to F$. On dit que :

*i) Un élément x de E est **fixe**, ou **invariant** par f lorsque $f(x) = x$.*

*ii) Une partie A de E est **stable** ou **invariante** par f lorsque $f(A) \subset A$, c'est-à-dire lorsque $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.*

Exemple 4.5
Déterminer un ensemble stable et un ensemble non stable par $f : x \mapsto x^2$.

Exemple 4.6
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$, A, B des parties de E et C une partie de G. Montrer que :

i) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

ii) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$;

iii) $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$.

5 Injections, surjections, bijections.

5 a) Injections

Définition 5.1

*Soit $f : E \to F$. On dit que f est **injective** lorsque :*

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Exemples 5.2

La première application ci-dessous est injective, mais pas la seconde.

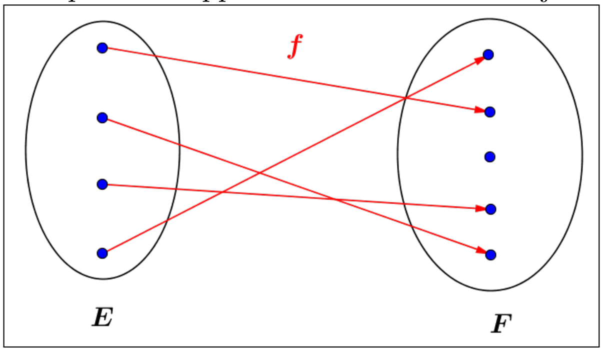

Fig 5.2.a - Une application injective

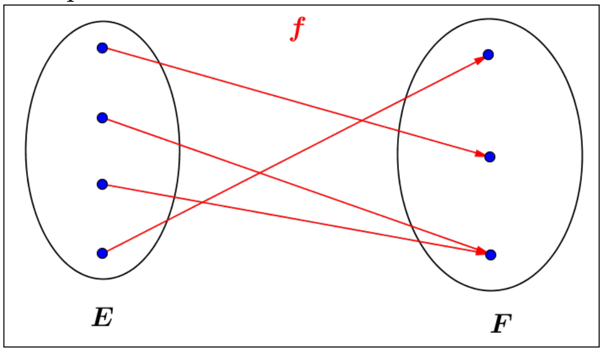

Fig 5.2.b - Une application non injective

Remarque 5.3
La définition de l'injectivité équivaut à $\forall (x,x') \in E^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. Autrement dit, f est injective si tout élément de F possède au plus un antécédent.

Exemple 5.4
Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que si f est strictement monotone alors f est injective.

Remarque 5.5
Attention, la réciproque de l'exemple précédent est fausse. Par exemple, la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$ est injective, mais n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}^*$. Elle est en revanche strictement monotone sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

5 b) Surjections

Définition 5.6

*Soit $f : E \to F$. On dit que f est **surjective** lorsque :*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

Remarque 5.7
Une application f est surjective lorsque tout élément de F possède au moins un antécédent par f.

Exemples 5.8

i) la première application ci-dessous est surjective, mais pas la seconde.

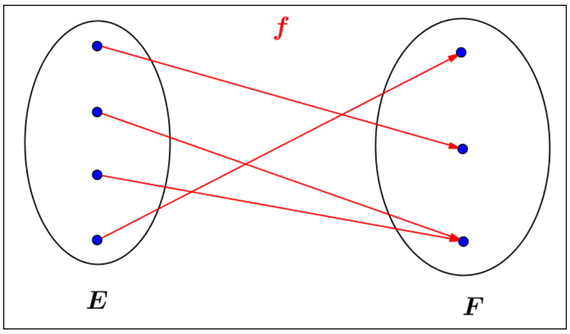

Fig 5.8.a - Une application surjective

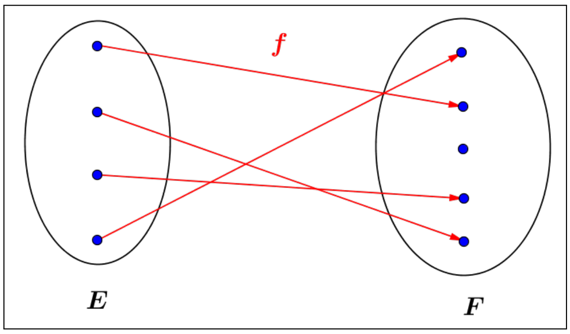

Fig 5.8.b - Une application non surjective

ii) L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}\right.$ est surjective.

iii) L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ n'est pas surjective, alors que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ l'est. La surjectivité d'une application f dépend des ensembles de départ et d'arrivé considérés, et pas uniquement de l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Proposition 5.9

Soit $f : E \to F$. La restriction au but de f à son image, $f^{|f(E)}$ est surjective.

Exemple 5.10

Pour chacune des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer si elle est injective, surjective.

$$f : x \mapsto x^2 + 1 \qquad g : x \mapsto e^x - 1 \qquad h : x \mapsto \sin x$$

5 c) Bijections

Définition 5.11

*Soit $f : E \to F$. On dit que f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si*

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$$

On dira aussi que f réalise une bijection de E sur F.

Remarque 5.12

Une application $f : E \to F$ est bijective si tout élément de F admet un unique antécédent par f.

Exemples 5.13

i) la première application ci-dessous est bijective, mais pas la seconde.

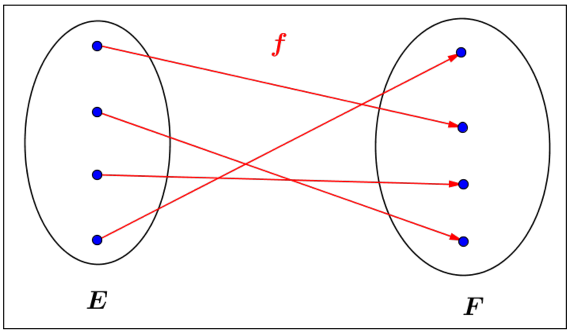

Fig 5.13.a - Une application bijective

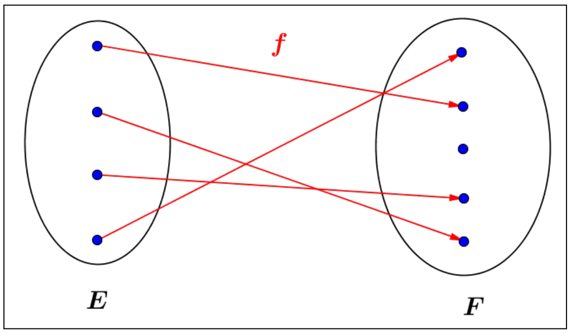

Fig 5.13.b - Une application non bijective

ii) L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}\right.$ est bijective.

iii) Les applications $\left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc}]-\infty,0] & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ sont bijectives.

iv) L'application Id_E est bijective.

Définition 5.14

*Soient $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F. On dit que f **réalise une bijection** de A sur B si :*

i) $\forall x \in A,\ f(x) \in B$,

ii) $\forall y \in B,\ \exists! x \in A,\ f(x) = y$.

Exemple 5.15

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas bijective, mais réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[0, +\infty[$, mais aussi de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, ou encore de $[1, 2]$ sur $[1, 4]$.

Proposition 5.16

Soient $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F. Si f réalise une bijection de A sur B, alors l'application $f_{|A}^{|B}$ est bien définie et est bijective.

Proposition 5.17

Soit $f : E \to F$ une application injective. Alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$.

5 d) Application réciproque

Définition 5.18

Soit $f : E \to F$ une application bijective. L'application **réciproque** *de f, notée f^{-1} est l'application définie de F à valeurs dans E qui à un élément y de F associe son unique antécédent x dans E par f. On a donc l'équivalence suivante :*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

Proposition 5.19

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Proposition 5.20

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors :

i) $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

ii) $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exemple 5.21

i) Justifier que $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bijective et déterminer sa réciproque.

ii) Pour quel éléments $a, b \in \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ est-elle bijective ?

Exemple 5.22

Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array} \right.$ est bijective et déterminer son application réciproque.

5 e) Propriétés

Proposition 5.23

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors :

i) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

ii) Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

iii) Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exemple 5.24

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors $g \circ f$ est définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$. De plus, $\forall x \in [0, +\infty[\,,\ (g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 = x$. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{Id}_{[0,+\infty[}$. Comme $\mathrm{Id}_{[0,+\infty[}$ est bijective, on en déduit, d'après le théorème précédent que f est injective et g est surjective. Mais on remarque sur cet exemple, que f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Théorème 5.25 (*Caractérisation des bijections*)

Soit une application $f : E \to F$. Alors f est bijective si, et seulement si, il existe deux application g et $h : F \to E$ telles que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ h = \mathrm{Id}_F\,.$$

De plus, dans ce cas, on a $g = h = f^{-1}$.

Exemple 5.26

On considère les applications :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \end{array}.$$

On admet que f et g sont bien définies. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Qu'en déduire ?

Exemple 5.27

Soit $f : \mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par $(n, p) \mapsto 2^n(2p + 1)$. Montrer que f est une bijection. En déduire qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Interpréter ce résultat.

6 Notion de relation

6 a) Définitions

Définition 6.1

Soit E un ensemble.

*i) Une **relation binaire** R sur E est la donnée d'une partie $X \subset E \times E$.*

ii) Soient $x, y \in E$. On dit que x est en relation avec y, et on note xRy lorsque $(x, y) \in X$. On a alors :

$$(x, y) \in X \iff xRy.$$

Exemples 6.2

Donnons quelques exemples de relations.

6 b) Relation d'équivalence, classes d'équivalence

Définition 6.3

Soit E un ensemble et R une relation binaire sur E. On dit que :

i) *R est réfléxive si $\forall x \in E,\ xRx$;*

ii) *R est symétrique si $\forall x, y \in E,\ xRy \Rightarrow yRx$;*

iii) *R est antisymétrique si $\forall x, y \in E,\ ((xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow x = y)$;*

iv) *R est transitive si $\forall x, y, z \in E,\ ((xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz)$.*

Définition 6.4

Soit E un ensemble et R une relation binaire sur E. On dit R est une ***relation d'équivalence*** *si elle est réfléxive, symétrique et transitive.*

Exemples 6.5

Montrer que la relation de congruence entre deux réels est une relation d'équivalence.

Définition 6.6

Soient E un ensemble, R une relation d'équivalence sur E et $x \in E$. On appelle ***classe d'équivalence*** *de x pour la relation R, et on note C_x, l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x :*

$$C_x = \{y \in E \mid xRy\}.$$

Proposition 6.7

Soient E un ensemble, R une relation d'équivalence sur E et $x, y \in E$.

i) *Si xRy, alors $C_x = C_y$.*

ii) *Si $\rceil\,(xRy)$, alors $C_x \cap C_y = \varnothing$.*

On dit que les classes d'équivalences forment une partition de E.

Exemples 6.8

Donner une partition de $\mathbb{N}$ à l'aide de classes d'équivalence.