Chapitre B4: Dérivation

Dans ce chapitre, I (et J) désigneront des intervalles véritables de $\mathbb{R}$ et, sauf mention du contraire, toutes les fonctions considérées seront à valeurs réelles.

1 Dérivabilité

1 a) Définitions et caractérisation

Définition 1.1 (*Dérivabilité*)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.

- *On dit que f est **dérivable en** a si le **taux d'accroissement au point** a admet une limite finie, c'est à dire si :*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe et est finie.}$$

  *Dans ce cas, la limite sera notée $f'(a)$ et elle sera appelée la **dérivée de f en a.***
- *On dit alors que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point de I.*

Exemple 1.2

Montrer qu'une fonction constante sur un intervalle ouvert I est dérivable sur I et que sa dérivée est nulle sur I.

Définition 1.3

*Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle I et au voisinage de a. On dit que f **est négligeable devant** g **au voisinage de** a et on note :*

$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$$

s'il existe une fonction e définie sur I qui vérifie, pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x)\,e(x)$ et qui admet pour limite 0 en a : $\lim_{x \to a} e(x) = 0$.

Remarque 1.4

Il n'est pas toujours possible d'écrire $x \mapsto e(x)$ comme un quotient

Définition 1.5 (*Développement limité à l'ordre 1*)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) - f(a) - \ell \times (x - a) = \underset{x \to a}{o}(x - a).$$

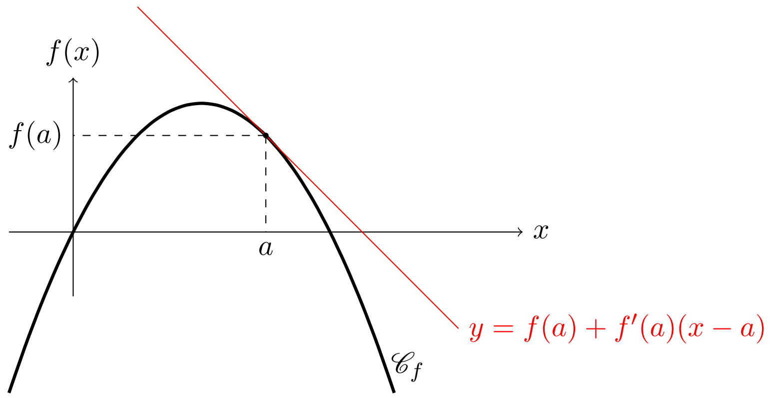
Proposition 1.6

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. Alors, f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a. Dans ce cas, on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \underset{x \to a}{o}(x - a).$$

Exemple 1.7
Montrer que, pour x au voisinage de 0, $\sin x = x + o(x)$.

Figure 1.8 (*Tangente en a*)



Définition 1.9 (*Dérivée à droite, dérivée à gauche*)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.

1. *On dit que f est **dérivable à droite en** a si le **taux d'accroissement au point** a admet une limite à droite finie, c'est à dire si :*
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ existe et est finie,}$$
et cette limite sera notée $f'_d(a)$.
2. *On dit que f est **dérivable à gauche en** a si le **taux d'accroissement au point** a admet une limite à gauche finie, c'est à dire si :*
$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ existe et est finie,}$$
et cette limite sera notée $f'_g(a)$.

Exemple 1.10
Étudier la dérivabilité à droite et à gauche en tout point de la fonction valeur absolue.

Proposition 1.11 (*Caractérisation à l'aide des dérivées à droite et à gauche*)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.

$$f \text{ est dérivable en } a \text{ si et seulement si } \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

et dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration :
Le taux d'accroissement admet une limite en a si et seulement s'il admet des limites à droite et à gauche en a à droite et à gauche ce qui donne l'équivalence demandée. ■

Exemple 1.12
Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+ \\ -x^2 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.13

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Remarque 1.14

La réciproque est fausse : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

1 b) Opérations sur les fonctions dérivables

Définition 1.15

*Soit f une fonction définie et dérivable sur I. On appelle alors **fonction dérivée de** f la fonction notée f' et définie par :*

$$f' : a \in I \mapsto f'(a).$$

Proposition 1.16 (*Opérations sur les dérivées*)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g deux fonctions définies et dérivables sur I. Alors :

1. *$f + g$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
2. *$\lambda.f$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$, $(\lambda.f)'(a) = \lambda f'(a)$;*
3. *fg est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$, $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
4. *si de plus, pour tout $a \in I$, $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et pour tout $a \in I$,*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2};$$
5. *si de plus, pour tout $a \in I$, $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$,*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Théorème 1.17 (*Dérivée d'une fonction composée*)

Soit f une fonction définie et dérivable sur I et g une fonction définie et dérivable sur J avec $f(I) \subset J$. Alors, la fonction composée $g \circ f$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

Démonstration :

Soit $a \in I$. Comme f est dérivable en a, elle admet un développement limité en a : il existe une fonction e_1 définie sur I, qui admet pour limite 0 en a telle que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,e_1(x).$$

Si $b \in J$, comme g est dérivable en b, elle admet un développement limité en b : il existe une fonction e_2 définie sur J, qui admet pour limite 0 en b telle que, pour tout $y \in J$:

$$g(y) = g(b) + g'(b)\,(y-b) + (y-b)\,e_2(y).$$

En particulier pour $b = f(a)$ et $y = f(x) \in J$, on a, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))\,(f(x)-f(a)) + (f(x)-f(a))\,e_2(f(x)) \\
&= g(f(a)) + g'(f(a))\,(f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,e_1(x)) + (f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,e_1(x))\,e_2(f(x)) \\
&= g(f(a)) + g'(f(a))\,f'(a)\,(x-a) + (x-a)\big(g'(f(a))\,e_1(x) + (f'(a)+e_1(x))\,e_2(f(x))\big) \\
&= g(f(a)) + g'(f(a))\,f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,e(x)
\end{aligned}$$

où $e(x) = g'(f(a))\, e_1(x) + (f'(a) + e_1(x))\, e_2(f(x))$. Par opérations sur les limites, il apparaît que e admet pour limite 0 en a. En conclusion, $g \circ f$ admet un développement limité en a donc $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

■

Théorème 1.18 (*dérivée de la bijection réciproque*)

Soit f une fonction définie et dérivable sur I strictement monotone sur I. Alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$, f^{-1} est continue et si pour tout $a \in I$, $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $b \in J$,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

Exemple 1.19

Montrer que la dérivée de la fonction réciproque de sh sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Grâce à ces opérations sur les dérivées, on obtient toutes les dérivées usuelles :

On considère f définie par $x \mapsto$ ...	alors f est dérivable sur $I =$ ...	et pour tout $x \in I$, $f'(x) =$ ... :
x^α $(x > 0)$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln\lvert x\rvert$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$ $(x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}))$	$\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\operatorname{sh}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch}(x)$
$\operatorname{ch}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh}(x)$
$\operatorname{Arcsin}(x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$	$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arccos}(x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$	$]-1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arctan}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Remarque 1.20

Toutes les fonctions sont continues également sur leur ensemble de dérivabilité mais ne peuvent se prolonger par continuité sur un intervalle plus grand à l'exception de $x \mapsto x^\alpha$ qui est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$.

On retrouve également le tableau des dérivées composées usuelles qui est une conséquence directe du tableau précédent et du théorème 11 : si u est une **fonction** dérivable sur I.

Fonction	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
u^n, $n \in \mathbb{N}^*$	I	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	lorsque u ne s'annule pas	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	lorsque $u > 0$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	I	$(e^u)' = u'e^u$
$\ln u$	lorsque $u > 0$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$\cos u$	I	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$\sin u$	I	$(\sin u)' = u' \cos u$

1 c) Fonctions à valeurs complexes

Définition 1.21

*Une **fonction f d'une variable réelle à valeurs complexes** est une application qui à tout élément $x \in \mathscr{D}(f) \subset \mathbb{R}$ associe au plus une image dans $\mathbb{C}$.*

Dans la suite, si f est une fonction à valeurs complexes, on le précisera. Si cela n'est pas précisé, f est à valeurs réelles.

Définition 1.22

*Si f est une fonction définie sur I et à valeurs complexes, on définit la fonctions **partie réelle de f** et **partie imaginaire de f** par, pour tout $x \in I$:*

$$Re(f)(x) = Re(f(x)) \quad \text{et} \quad Im(f)(x) = Im(f(x)).$$

On peut étendre les définitions de limite **finie** en un point ou à l'infini mais on prendra garde à la remarque suivante :

Remarque 1.23

La monotonie et les limites infinie n'ont pas de sens pour des fonctions à valeurs complexes donc tous les théorèmes les faisant intervenir ne s'étendent pas.

Proposition 1.24

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs complexes.

1. *f admet une limite finie dans $\mathbb{C}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ admettent des limites **finies** en a et :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} Re(f)(x) + i \lim_{x \to a} Im(f)(x);$$

2. *f est continue sur I si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues sur I ;*
3. *f est dérivable sur I si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables sur I et, pour tout $x \in I$:*

$$f'(x) = Re(f)'(x) + i\, Im(f)'(x).$$

Démonstration :

Les démonstrations sont uniquement une application des définitions et l'utilisation de l'inégalité triangulaire. ■

Proposition 1.25

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\alpha x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \alpha\, e^{\alpha x}.$$

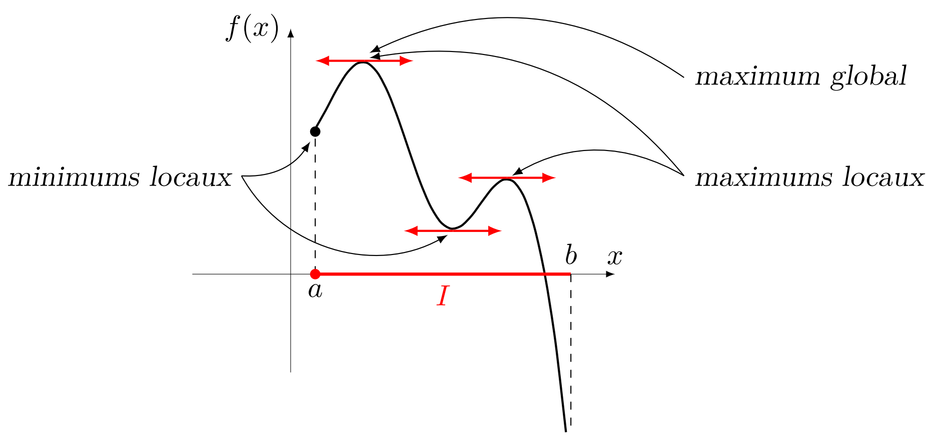
2 Aspects théoriques

2 a) Théorème de Rolle et accroissements finis

Proposition 2.1 (*Condition nécessaire d'extremum*)

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$, $a < b$. Si f admet un extremum local en un point $c \in I$ en lequel elle est dérivable alors $f'(c) = 0$.

Figure 2.2 (*Condition nécessaire d'extremum*)



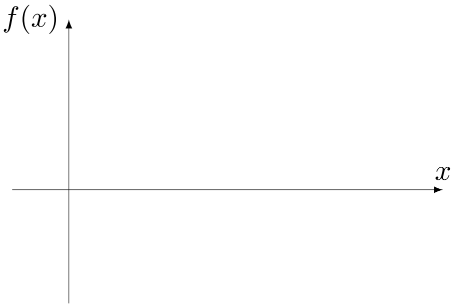
Remarque 2.3

- Cette propriété ne concerne que les fonctions dérivables : $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ admet un minimum en 0 sans pour autant que les dérivées en 0 soient nulles.
- Cette propriété n'est plus valable si le point est seulement adhérent à I : la fonction $g : x \in [0, 1] \mapsto x$ admet un maximum en 1 et pourtant la dérivée en ce point ne s'annule pas.
- Cette propriété n'admet pas de réciproque : $h : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ possède une dérivée qui s'annule en 0 sans y admettre d'extremum.

Théorème 2.4 (*Théorème de Rolle*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Figure 2.5



Remarque 2.6
On peut prendre des hypothèses moins fortes pour le théorème de Rolle. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

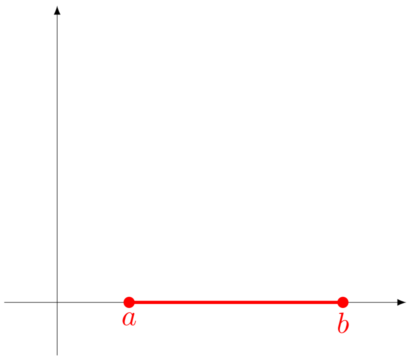
Exemple 2.7
Soit P un polynôme. Montrons qu'entre deux racines réelles distinctes de P, il existe une racine de P'.

Théorème 2.8 (*Égalité des accroissements finis*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Figure 2.9 (*Égalité des accroissements finis*)



Définition 2.10

Soit $M \in \mathbb{R}^+$ et f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est lipschitzienne de rapport M si, pour tout $x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Remarque 2.11
Les fonctions lispchitziennes sont donc en particulier continues.

Proposition 2.12 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ $(a<b)$. On suppose que f' est bornée sur $]a,b[$ c'est-à-dire il existe $M \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x \in]a,b[$:

$$|f'(x)| \leq M.$$

Alors f est lipschitzienne de rapport M sur $[a,b]$: pour tous $x, y \in [a,b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

2 b) Prolongement de la dérivée

Théorème 2.13 (*Théorème de limite de la dérivée*)

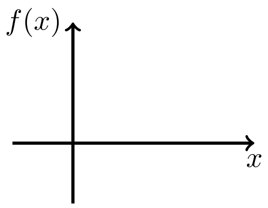
Soit f une fonction définie et continue sur I et $a \in I$. On suppose que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{admet pour limite } \ell \text{ lorsque } x \text{ tend vers } a$$

et dans ce cas, on a l'alternative :

1. *si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.*
2. *si $\ell = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en a et la courbe de f admet une tangente verticale en ce point.*

Figure 2.14 (*Exemple de tangente verticale*)



Remarque 2.15

Avec les conditions du théorème, si f est aussi supposée de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I - \{a\}$, il vient alors que f' est continue en a : le fait de « prolonger la dérivabilité » nous permet alors d'avoir f de classe C^1 sur I tout entier. Attention : aux bornes de l'intervalle, on parlera seulement de la dérivée à droite ou à gauche.

Exemple 2.16

Montrons que la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{-1}{|x|}}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, et admet un prolongement continu et dérivable sur $\mathbb{R}$.

3 Applications

3 a) Caractérisation des fonctions monotones

Théorème 3.1 (*caractérisation de la monotonie*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. *f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$;*
2. *f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$;*
3. *f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$.*

Remarque 3.2
Ce résultat peut s'étendre si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

En adaptant la démonstration précédente, on obtient :

Proposition 3.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. *si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante ;*
2. *si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.*

Exemple 3.4
Que dire des réciproques de la proposition précédente ?

Théorème 3.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur I.

1. *si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et que f' s'annule en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I ;*
2. *si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ et que f' s'annule en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.*

3 b) Notion de point fixe

Définition 3.6

Soit f une fonction définie sur I. On appelle **point fixe** de f *tout réel $c \in I$ vérifiant :*

$$f(c) = c.$$

On donne un exemple de fonction avec un point fixe et la manière de l'atteindre :

Exemple 3.7
On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \pi + \dfrac{1}{3}\sin(x)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers un point fixe de f et que ce point fixe est unique.