Chapitre B3 : Limites, continuité

1 Définition de la limite d'une fonction

1 a) Intervalles

Définition 1.1

*Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est une partie I de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (a,b) \in I^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I$. Un intervalle est **véritable** s'il contient au moins deux réels distincts.*

Remarque 1.2
Lorsque $a \leqslant b$, on pourra noter le segment $[a,b]$ également $[b,a]$ pour éviter de distinguer des cas. On a montré dans le chapitre B2 que les intervalles de $\mathbb{R}$ ne sont que de 8 types : $\mathbb{R}$, $[a,\pm\infty[$, $]a,\pm\infty[$, $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$ et $\emptyset$.

Définition 1.3

Soit I un intervalle.

i) I est ouvert s'il est du type $\mathbb{R}$, $\varnothing$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]a,b[$.

ii) I est fermé s'il est du type $\mathbb{R}$, $\varnothing$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $[a,b]$.

Définition 1.4

*Soit I un intervalle. On dira que I est un **segment** si I est fermé et borné, ce qui signifie qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leqslant b$ et $I = [a,b]$.*

1 b) Fonctions majorées, minorées

Dans la suite de ce chapitre, sauf mention du contraire les lettres I et J désigneront des parties de $\mathbb{R}$ et les fonctions considérées seront à valeurs réelles.

Définition 1.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est minorée, majorée ou bornée lorsque l'ensemble $f(I)$ l'est lui-même. En d'autres termes, on a :

*i) f est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall x \in I,\ m \leqslant f(x)$.*

*ii) f est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$.*

*iii) f est dite **bornée** s'il existe des réels m et M tels que $\forall x \in I,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.*

Notations 1.6
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

i) Si f est majorée, on note $\sup\limits_I f$ ou $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ la quantité $\sup\{f(x) \mid x \in I\}$.

ii) Si f est minorée, on note $\inf\limits_I f$ ou $\inf\limits_{x\in I} f(x)$ la quantité $\inf\{f(x) \mid x \in I\}$.

Exemple 1.7
La fonction tan est-elle bornée sur $[0, \frac{\pi}{2}[$?

1 c) Notion de voisinage

Définition 1.8

Soit x_0 un réel.

i) Tout intervalle de la forme $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ avec $\delta > 0$ est appelé ***voisinage*** *de x_0.*

ii) Tout intervalle de la forme $]b, +\infty[$ avec $b \in \mathbb{R}$ est appelé ***voisinage*** *de $+\infty$.*

iii) Tout intervalle de la forme $]-\infty, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ est appelé ***voisinage*** *de $-\infty$.*

On notera $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. $\overline{\mathbb{R}}$ s'appelle la droite numérique achevée. Si $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, on notera $\mathcal{V}(\alpha)$ l'ensemble des voisinages de α.

Définition 1.9

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On dira que α est ***adhérent*** *à A lorsque $\forall V \in \mathcal{V}(\alpha),\ V \cap A \neq \varnothing$.*

Exemple 1.10

Justifier que tous les réels de $[0,1]$ sont adhérents à $]0,1[$.

Définition 1.11

Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un réel $x \in A$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On dit que $P(x)$ ***est vraie au voisinage de*** *α s'il existe un voisinage V de α tel que $P(x)$ soit vraie pour tout $x \in A \cap V$.*

Exemple 1.12

Donner une fonction qui s'annule sur une partie de $\mathbb{R}$ non finie mais qui ne s'annule pas au voisinage de 1 puis une fonction qui s'annule sur une partie de $\mathbb{R}$ non finie mais qui ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$.

1 d) Définition des limites à l'aide de la notion de voisinage

Nous donnons ci-dessous la définition générale de la notion de limite.

Définition 1.13

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que α est adhérent à I et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ ***tend vers*** *β losque x tend vers α, ce qui sera noté $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$, si l'on a :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\beta),\ \exists W \in \mathcal{V}(\alpha),\ \forall x \in I,\ x \in W \Rightarrow f(x) \in V.$$

Lorsque $\beta \in \mathbb{R}$ fini, on dit que f ***converge*** *en α. Dans le cas contraire, on dit que f* ***diverge*** *en α.*

Remarque 1.14

Il est erroné de croire que toute fonction possède une limite en α. On montrera que la fonction cos ne possède pas de limite en $+\infty$. Il existe donc deux types de fonctions divergentes : celles qui ne possèdent pas de limite, et celles qui possèdent une limite infinie.

Théorème 1.15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I. Si f converge en α alors alors f est bornée au voisinage de α.

Exemple 1.16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I. Montrer que si f possède une limite finie $\ell \neq 0$ en α, alors f ne s'annule pas au voisinage de α.

1 e) Limite en $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 1.17

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $+\infty$ adhérent à I, et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** *β en $+\infty$, ce qui sera noté $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta$, si :*

i) Pour $\beta = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$;

ii) Pour $\beta = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A$;

iii) Pour $\beta = \ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 1.18

Dans le cas $\beta = +\infty$, on peut montrer que la définition ci-dessus est équivalente aux deux assertions suivantes :

i) $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > B \Rightarrow f(x) > A$.

ii) $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \in]B, +\infty[\Rightarrow f(x) \in]A, +\infty[$.

On retrouve ainsi sur la définition exprimée en termes de voisinage. On pourrait faire la même remarque concernant les autres cas, et concernant les définitions suivantes.

Théorème 1.19

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $+\infty$ adhérent à I, et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite β en $+\infty$, cette limite est unique.

Exemple 1.20

Montrer, avec la définition de la limite que la fonction ln tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Définition 1.21

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $-\infty$ adhérent à I et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** *β en $-\infty$, ce qui sera noté $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \beta$, si :*

i) Pour $\beta = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$;

ii) Pour $\beta = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant B \Rightarrow f(x) \leqslant A$;

iii) Pour $\beta = \ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leqslant B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 1.22

Comme précédemment (la démonstration est analogue), on a unicité de la limite en $-\infty$.

1 f) Limite en un réel x_0

Définition 1.23

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, x_0 un réel adhérent à I, et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** *β en x_0, ce qui sera noté $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \beta$, si :*

i) Pour $\beta = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \geqslant A$;

ii) Pour $\beta = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow f(x) \leqslant A$.

iii) Pour $\beta = \ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 1.24
En observant que l'on a $|x - x_0| \leqslant \delta \iff x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on peut démontrer que cette définition est bien équivalente à celle qui avait été donnée en termes de voisinages. Comme précédemment (la démonstration est analogue), on a unicité de la limite en un réel x_0.

1 g) Limites à gauche et à droite

Définition 1.25

Soit A un partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que :

i) *α est* ***adhérent à droite*** *à A si α est adhérent à $A \cap]\alpha, +\infty[$.*

ii) *α est* ***adhérent à gauche*** *à A si α est adhérent à $A \cap]-\infty, \alpha[$.*

Définition 1.26 (*Limite à droite*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, x_0 un réel adhérent à droite à I et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** *β en x_0^+, ou que f* ***tend vers*** *β* ***par valeurs supérieures*** *en x_0, noté $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$, lorsque :*

i) *Pour $\beta = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x) \geqslant A$;*

ii) *Pour $\beta = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x) \leqslant A$;*

iii) *Pour $\beta = \ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x \in]x_0, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.*

Remarque 1.27
La limite de f en x_0 par valeurs supérieures est en fait la limite de la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ en x_0. La définition de la limite en x_0^+ est donc un cas particulier de la définition de la limite en x_0.

Définition 1.28 (*Limite à gauche*)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, x_0 un réel adhérent à gauche à I et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** *β en x_0^-, ou que f* ***tend vers*** *β* ***par valeurs inférieures*** *en x_0, noté $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$, lorsque :*

i) *Pour $\beta = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f(x) \geqslant A$;*

ii) *Pour $\beta = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow f(x) \leqslant A$;*

iii) *Pour $\beta = \ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ x \in]x_0 - \delta, x_0[\Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.*

Exemple 1.29
Déterminer la limite, en tout réel α à droite et à gauche de la fonction partie entière.

Théorème 1.30

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ adhérent à I et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

i) *On suppose $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \beta$. Si x_0 est adhérent à droite (resp. à gauche) à I, alors f admet une limite à droite (resp. à gauche) en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$).*

ii) *Réciproquement, si x_0 est adhérent à droite et à gauche à I, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \beta$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \beta$.*

Remarque 1.31
Attention, dans le cas où $x_0 \in I$, on peut avoir des limites à droite et à gauche en x_0 définies et égales, sans que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ soit défini. Il suffit pour cela que $f(x_0)$ ne soit pas égal à la limite de f à gauche et à droite en x_0. Le résultat du (ii) se généralise au cas où x_0 est adhérent à droite mais pas à gauche ou à gauche mais pas à droite.

Exemple 1.32
Justifier que la fonction inverse ne possède pas de limite en 0.

2 Propriétés des limites

2 a) Résultats fondamentaux

Théorème 2.1 (*Caractérisation séquentielle de la limite*)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$.

ii) Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \beta$.

Remarque 2.2
On peut utiliser ce théorème pour montrer qu'une fonction ne possède pas de limite en un point $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ comme dans l'exemple suivant.

Exemple 2.3
Montrer que la fonction cos ne possède pas de limite en $+\infty$.

Théorème 2.4 (*Composition des limites*)

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que α est adhérent à I et β est adhérent à J. On suppose :

i) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$,

ii) $\lim\limits_{x \to \beta} g(x) = \gamma$.

La fonction $g \circ f$ admet une limite en α, et $\lim\limits_{x \to \alpha} (g \circ f)(x) = \gamma$.

Exemple 2.5
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

2 b) Opérations élémentaires sur les limites

Théorème 2.6

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant une limite en $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à I. Le tableau suivant donne la limite de la fonction $f+g$ en α en fonction des limites de f et g en α. Le symbole ***F.I.*** *indique qu'on ne peut pas conclure avec les seules hypothèses faites sur f et g.*

		$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$		
		$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$F.I.$
	ℓ	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
	$+\infty$	$F.I.$	$+\infty$	$+\infty$

Remarque 2.7

Il est erroné de penser que si l'on a deux fonctions f et g, telles que par exemple $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)-g(x)) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$. Cela n'est vrai que si ces deux fonctions possèdent une limite : un contre-exemple est donné par $f(x) = g(x) = \cos x$ et $\alpha = +\infty$.

Théorème 2.8

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant une limite en $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à I. Le tableau suivant donne la limite de la fonction $f \times g$ en fonction des limites de f et g en α. Le symbole ***F.I.*** *indique qu'on ne peut pas conclure avec les seules hypothèses faites sur f et g.*

		$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$		
		0	$\ell' \neq 0$	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	0	0	0	$F.I.$
	$\ell \neq 0$	0	$\ell\ell'$	∞
	∞	$F.I.$	∞	∞

Théorème 2.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une limite en $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à I. On suppose de plus que la fonction f admet pour limite $\ell \neq 0$. La fonction $1/f$ est définie au voisinage de α et $1/f$ tend vers $1/\ell$ en α.

Remarque 2.10

On pourrait aussi ajouter l'opération de multiplication de f par un scalaire λ ce qui ramène au cas des produits de fonctions ainsi que le quotient f/g qui s'utilise avec l'inverse en écrivant que $f/g = f \times 1/g$.

Exemple 2.11
Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrons que :

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^b = \begin{cases} +\infty & \text{si } b > 0 \\ 1 & \text{si } b = 0 \\ 0 & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

2 c) Limites et relation d'ordre

Théorème 2.12 (*Théorème de prolongement des inégalités*)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I, V un voisinage de α, et $m, M, \ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$.

i) Si $\forall x \in I,\ x \in V \Rightarrow m \leqslant f(x)$, alors $m \leqslant \ell$.

ii) Si $\forall x \in I,\ x \in V \Rightarrow f(x) \leqslant M$, alors $\ell \leqslant M$.

Théorème 2.13 (*Théorème de comparaison*)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I. On suppose qu'il existe un voisinage V de α tel que :

$$\forall x \in I,\ x \in V \Rightarrow g(x) \leqslant f(x).$$

i) Si $\lim_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

ii) Si $\lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$.

Exemple 2.14
Déterminer l'éventuelle limite en 0^+ de $x \mapsto \frac{1}{x} + \cos x$.

Théorème 2.15 (*Théorème d'encadrement*)

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I, V un voisinage de α et $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons en outre que :

i) $\forall x \in I,\ x \in V \Rightarrow g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

ii) $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) = \ell$.

Alors f possède une limite lorsque x tend vers α et $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$.

Exemple 2.16
Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

On en déduit le théorème suivant, fort utile en pratique.

Théorème 2.17

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I, V un voisinage de α et $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons en outre que :

i) $\forall x \in I,\ x \in V \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant g(x)$.

ii) $\lim_{x \to \alpha} g(x) = 0$.

Alors $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$.

Exemple 2.18

Montrer que $\lim_{x \to 0^+} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\cos(x)}}{x} = 0$.

2 d) Théorème de la limite monotone

On peut citer la version fonctionnelle du théorème de la limite monotone qui dit que si f est une fonction monotone, alors f admet des limites à droite et à gauche en tout point où cela a du sens.

Remarque 2.19
Par convention, on dira que :

— $+\infty$ est adhérent à gauche à I s'il est adhérent à I.

— $+\infty$ n'est pas adhérent à droite à I.

— $-\infty$ est adhérent à droite à I s'il est adhérent à I.

— $-\infty$ n'est pas adhérent à gauche à I.

Théorème 2.20 (*Théorème de la limite monotone, version fonctionnelle*)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que a est adhérent à droite à I et b est adhérent à gauche à I. Si la fonction f est monotone sur I, alors f admet une limite finie ou infinie, à droite en a et à gauche en b. Plus précisement, si on note $I_{>a} = I \cap]a, +\infty[$ et $I_{<b} = I \cap]-\infty, b[$, on a :

$i)$ Dans le cas où f est croissante :

— *Si f n'est pas minorée sur $I_{>a}$, alors $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.*

— *Si f est minorée sur $I_{>a}$, alors f possède une limite finie en a^+, et $\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{I_{>a}} f$.*

— *Si f n'est pas majorée sur $I_{<b}$, alors $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.*

— *Si f est majorée sur $I_{<b}$, alors f possède une limite finie en b^- , et $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{I_{<b}} f$.*

$ii)$ Dans le cas où f est décroissante :

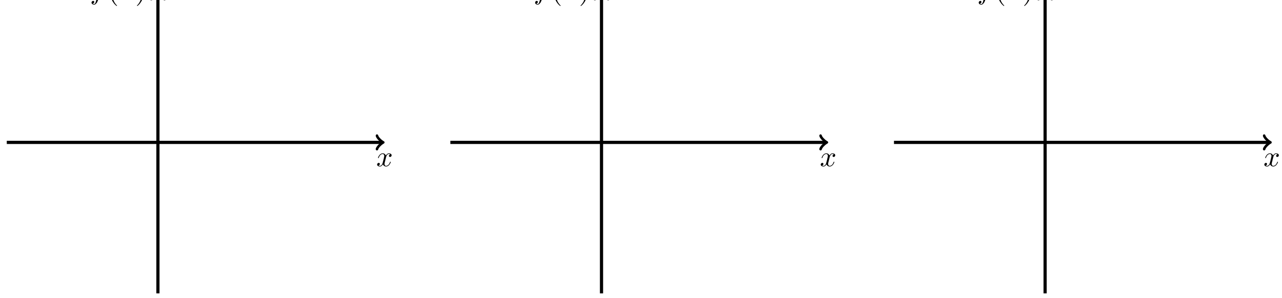
— *Si f n'est pas majorée sur $I_{>a}$, alors $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.*

— *Si f est majorée sur $I_{>a}$, alors f possède une limite finie en a^+, et $\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{I_{>a}} f$.*

— *Si f n'est pas minorée sur $I_{<b}$, alors $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$.*

— *Si f est minorée sur $I_{<b}$, alors f possède une limite finie en b^-, et $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{I_{<b}} f$.*

On pourra retenir le théorème de la limite monotone pour les fonctions à l'aide de dessins.



Démonstration : On traite le cas où $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie et croissante sur un intervalle $I = [a, b[$.

(i) Supposons que f est majorée sur I. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a, b[: f(x) \leq M$. Ainsi l'ensemble $A = \{f(x) \mid x \in [a, b[\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et admet donc une borne supérieure qui est le plus petit des majorants de A. On pose $\ell = \sup(A)$. Montrons que f tend vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\ell - \varepsilon$ n'est pas une majorant de A, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que

$$\ell - \varepsilon \leq f(x_0).$$

Posons $\delta = b - x_0 > 0$. On a $x_0 = b - \delta$. Soit $x \in I \cap [b - \delta, b + \delta]$. Comme f est croissante, on a :

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Comme ℓ est un majorant de A, on a également :

$$f(x) \leq \ell \leq \ell + \varepsilon.$$

En conclusion, en combinant les trois inégalités, pour tout $x \in I$:

$$|x - b| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$$

ce qui s'écrit :

$$|x - b| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

qui est la définition de f tend vers ℓ.

(ii) Supposons que f n'est pas majorée sur I. Montrons que f tend vers $+\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que

$$M \leq f(x_0).$$

Posons $\delta = b - x_0 > 0$. On a $x_0 = b - \delta$. Soit $x \in I \cap [b - \delta, b + \delta]$. Comme f est croissante, on a :

$$f(x_0) \leq f(x).$$

En conclusion, en combinant les deux inégalités, pour tout $x \in I$:

$$|x - b| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad M \leq f(x)$$

qui est la définition de f tend vers $+\infty$. $\square$

Exemple 2.21
Montrer que

$$x \mapsto \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

admet une limite finie en $+\infty$.

3 Continuité

3 a) Définitions

Définition 3.1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

i) f *est* ***continue*** *en* $x_0 \in I$ *si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ii) f *est* ***continue*** *sur* I *si* f *est continue en* x_0*, pour tout* $x_0 \in I$.

iii) f *est* ***continue à droite*** *(resp.* ***à gauche****) en* $x_0 \in I$*, adhérent à droite (resp. à gauche) à* I *si* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ *(resp.* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*).*

Remarque 3.2

Il a été dit en Terminale que les fonctions continues sont celles que l'on peut *tracer sans lever le stylo*. Cette notion est informelle et ne peut donc pas être utilisée dans une démonstration, mais il peut être utile de la garder à l'esprit puisqu'elle permet d'appréhender la majorité des exemples rencontrés au concours.

Le résultat suivant montre qu'une fonction est continue en un point si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en ce point.

Théorème 3.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $x_0 \in I$*, adhérent à droite et à gauche à* I*. Alors* f *est continue en* x_0 *si et seulement si* f *est continue à droite et à gauche en* x_0 *:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Exemple 3.4

Soit α, β, γ des réels. A quelle condition sur ces réels, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp x & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Remarque 3.5

Soit $f : [a, c] \to \mathbb{R}$. L'exemple précédent montre que si $f_{|[a,b]}$ et $f_{|]b,c]}$ sont continues, alors f n'est pas forcément continue sur $[a, c]$: il faut aussi vérifier que f est continue en b.

Exemple 3.6

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue en 0.

3 b) Continuité des fonctions usuelles

Dans cette section, on rappelle que les fonctions usuelles sont continues. Les lettres I et J désigneront des intervalles véritables.

Théorème 3.7

Les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition, comme indiqué :

i) $x \mapsto ax + b$ *sur* $\mathbb{R}$, *pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$;

ii) $x \mapsto x^n$ *sur* $\mathbb{R}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$;

iii) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $\mathbb{R}^*$;

iv) $x \mapsto |x|$ *sur* $\mathbb{R}$;

v) $x \mapsto e^x$ *sur* $\mathbb{R}$;

vi) $x \mapsto \ln x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$;

vii) $x \mapsto x^\alpha$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$;

viii) $x \mapsto \cos x$ *et* $x \mapsto \sin x$ *sur* $\mathbb{R}$;

ix) $x \mapsto \tan x$ *sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Théorème 3.8

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. On a alors les résultats suivants.*

i) $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ *est continue sur* I, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ *est continue sur* I.

iii) $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ *est continue sur* I.

iv) Si g *ne s'annule pas sur* I, *alors* $\dfrac{1}{g} : x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ *et* $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *sont continues sur* I.

Démonstration :

Ce résultat découle directement de la définition de la continuité d'une fonction et des résultats correspondants sur les limites. ■

Exemple 3.9

Déterminer le domaine de continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Théorème 3.10

Soient $f : I \to J$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. Alors la fonction composée :*

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

est continue sur I.

Démonstration :

Ce résultat découle directement de la définition de la continuité d'une fonction et du théorème de composition des limites. ■

Exemple 3.11

Déterminer le domaine de continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{\operatorname{ch}(\ln x)}$.

3 c) Prolongement par continuité

Théorème et définition 3.12 (*Théorème de prolongement par continuité*)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R} \setminus I$, adhérent à I. On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $b \in \mathbb{R}$. Alors, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{a\}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

*est continue en a. On dit que $\tilde{f}$ est le **prolongement par continuité** de f en a.*

Exemple 3.13

Montrer que la fonction définie par $f : x \mapsto x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0.

Exemple 3.14

Montrer que la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-2}}$ se prolonge par continuité en 2 (on donnera le domaine de définition de la fonction prolongée).

3 d) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.15

Soient I un intervalle véritable, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \leqslant b$ deux réels de I et y compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, $\exists c \in [a, b]\,,\;$ tel que $f(c) = y$.

Théorème 3.16 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

L'image directe d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Démonstration : On va utiliser le résultat rappelé au début de ce chapitre : une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $\alpha, \beta \in A$, $[\alpha, \beta] \subset A$. On va utiliser ce théorème avec $A = f(I)$.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Montrons que $f(I)$ est un intervalle. Soit $\alpha, \beta \in f(I)$. Par définition, il existe $a, b \in I$ tel que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Montrons que $[\alpha, \beta] \subset f(I)$. Soit $y \in [\alpha, \beta] = [f(a), f(b)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$ donc $y \in f(I)$.

Par suite, pour tout $y \in [\alpha, \beta]$, $y \in f(I)$ donc $[\alpha, \beta] \subset f(I)$. Ainsi, pour tous $\alpha, \beta \in f(I)$, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.

En conclusion, par le théorème rappelé en début de démonstration, $f(I)$ est un intervalle. □

Exemple 3.17

Montrer qu'il existe $\alpha \in [-1, 1]$ tel que $\frac{1}{\alpha} + \alpha^5 = \sqrt{17}$.

Exemple 3.18

Montrer que toute fonction continue $f : [0, 1] \to [0, 1]$ possède un point fixe.

On a enfin le résultat suivant, qui stipule que la réciproque d'une bijection continue est une bijection continue.

Théorème 3.19

Soient I un intervalle véritable et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Alors :

i) $J = f(I)$ *est un intervalle.*

ii) f *réalise une bijection de I sur J.*

iii) *Si $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à I et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à J, alors :*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \iff \lim_{x\to\beta} f^{-1}(x) = \alpha.$$

iv) $f^{-1} : J \to I$ *est continue.*

Remarque 3.20

On retiendra la situation suivante. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur lui-même et est égale à son propre inverse. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et pourtant $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ est erroné. Cela vient du fait que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, mais sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. La limite est correcte si on définit f sur $]0, +\infty[$.

3 e) Principe du maximum

Nous ne démontrerons pas le théorème suivant qui utilise plusieurs résultats hors programme.

Théorème 3.21 (*Principe du maximum*)

Une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes. Ceci signifie que qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f([a, b]) = [m, M] \text{ avec } m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Exemple 3.22

Soient $a \leqslant b$ des réels et f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose : $\forall x \in [a, b]\,,\ f(x) > 0$. Montrer $\exists \gamma > 0,\ \forall x \in [a, b]\,,\ f(x) \geqslant \gamma$.

Remarque 3.23

Le résultat de l'exercice précédent n'est plus vrai si l'on considère une fonction continue sur un intervalle quelconque. Prenons par exemple la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. On a bien $f(x) > 0$ sur cet intervalle, mais puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il n'existe aucun minorant strictement positif de cette fonction. La fonction définie par $f(x) = x$ sur $]0, 1]$ fournit un autre contre-exemple.

Remarque 3.24

Nous venons de démontrer que l'image directe d'un segment par une fonction continue est un segment et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'image directe d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. En revanche, il est par exemple erroné de penser que l'image directe d'un intervalle ouvert par une fonction continue est encore un intervalle ouvert. Un contre exemple est donné par la fonction définie par $f(x) = x(1 - x)$ sur $]0, 1[$: on a $f\left(]0, 1[\right) = \left]0, \dfrac{1}{4}\right]$. De même, l'image directe par une fonction continue d'un intervalle de la forme $[a, b[$ n'est pas nécessairement fermé à gauche ni nécessairement ouvert à droite.

4 Fonctions à valeurs complexes

La notion de limite s'étend naturellement aux fonctions à valeurs complexes.

Définition 4.1

*Soient $f : I \to \mathbb{C}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à I et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f **tend vers** ℓ lorsque x tend vers α, ce qui sera noté $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$, si on a :*

$$\lim_{x\to\alpha} \mathcal{R}\mathrm{e}\, f(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}\,\ell \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\alpha} \mathcal{I}\mathrm{m}\, f(x) = \mathcal{I}\mathrm{m}\,\ell.$$

Remarque 4.2

Si f est à valeurs complexes, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty$ n'a aucun sens.

Proposition 4.3

Soient $f : I \to \mathbb{C}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à I et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

ii) $\lim\limits_{x\to\alpha} |f(x) - \ell| = 0$.

iii) *Dans le cas* $\alpha = x_0 \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 4.4

Tous les résultats énoncés dans les parties précédentes n'ont pas nécessairement un sens dans le cas des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$, pour la simple raison qu'il n'existe pas d'ordre naturel sur $\mathbb{C}$: c'est par exemple le cas du théorème de la limite monotone, puisque la notion de fonction monotone à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'est pas définie. On peut néanmoins noter que tous les théorèmes énoncés dans les sections 2 a) et 2 b) s'étendent naturellement aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 4.5

Soient I un intervalle véritable, $f : I \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in I$. Soient $g, h : I \to \mathbb{R}$ les fonctions $\mathcal{R}\mathrm{e}\, f$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}\, f$. On dit que :

i) *f est **continue** en x_0 si g et h sont continues en x_0.*

ii) *f est **continue** sur I si f en continue en x_0, pour tout $x_0 \in I$.*

Remarque 4.6

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 4.7

Déterminer la limite de $x \mapsto e^{ix}$ lorsque x tend vers $\pi/3$.