Chapitre B1 : Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

1 Généralités

Définition 1.1

Soit I un intervalle véritable et $n \in \mathbb{N}^*$.

*i) On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** une équation d'inconnue y, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et à valeur dans $\mathbb{R}$ donnée par :*

$$(E) \quad y' + a(t)\, y = d(t) \quad \text{sur } I$$

*où a et d sont des fonctions **continues** sur I.*

*ii) On appelle **équation homogène** ou équation sans second membre associée à (E), notée (E_H), l'équation où le second membre est remplacé par la fonction nulle :*

$$(E_H) \quad y' + a(t)\, y = 0 \quad \text{sur } I.$$

Remarque 1.2

i) En général, une équation (E) et un intervalle I étant donnés, il existe une infinité de fonctions solutions de (E) sur I, et il arrive que l'on puisse écrire toutes ces fonctions solutions à l'aide d'une ou plusieurs constantes du corps $\mathbb{K}$ de référence, appelées constante(s) d'intégration.

ii) Lorsque l'on écrit une solution quelconque de (E), sans donner de valeur numérique à la (aux) constante(s) d'intégration, on dit qu'on écrit la solution générale de (E). Au contraire, une fonction solution précise est dite solution particulière de (E).

iii) La question de savoir si une condition initiale détermine effectivement une solution et une seule sur un intervalle I constitue le problème de Cauchy. Sa réponse n'est pas toujours positive.

iv) La notation $y' + a(t)y = d(t)$ est imprécise et il faudrait écrire : pour tout $t \in I$, $y'(t) + a(t)y(t) = d(t)$.

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On notera $\mathcal{S}_I$ l'ensemble des solutions de (E) sur I, et $\mathcal{S}_{0,I}$ celui de (E_H).

Théorème 1.3 (*Structure de $\mathcal{S}_{0,I}$*)

i) La fonction nulle est une solution de (E_H).

ii) Si f et g sont des solutions de (E_H) et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda f + g$ est une solution de (E_H).

Remarque 1.4
On a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall (f_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in (\mathcal{S}_{0,I})^p\ ,\ \forall (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant p} \in \mathbb{K}^p,\ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k \in \mathcal{S}_{0,I}.$$

On dit aussi que $\mathcal{S}_{0,I}$ est stable par combinaisons linéaires.

Théorème 1.5 (*Structure de $\mathcal{S}_I$*)

Supposons que (E) admette une solution particulière y_P sur I. Toute solution y de E s'écrit de manière unique :

$$y = y_0 + y_P,$$

où y_0 est une solution de (E_0) sur I. La solution générale d'une équation différentielle linéaire (E) est la somme d'une solution particulière de (E), et de la solution générale de (E_0).

Théorème 1.6 (*Principe de superposition des solutions*)

Soit d_1, d_2 des fonctions continues sur I. Si, pour $i = 1, 2$, y_i est une solution de l'équation : $y_i' + a(t)\, y_i = d_i(t)$ sur I, alors la fonction $y = y_1 + y_2$ est solution de l'équation :

$$y' + a(t)\, y = d_1(t) + d_2(t) \quad \textit{sur } I.$$

2 Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

2 a) Solution générale de l'équation homogène

Soit I un intervalle contenant au moins deux points. On considère dans toute cette partie l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + a(t)\, y = d(t) \quad \text{sur } I$$

où a, d sont des fonctions continues sur I.

Théorème 2.1

L'équation différentielle linéaire homogène associée à l'équation différentielle (E) du premier ordre : $(E_H) : y' + a(t)y = 0$ a pour ensemble de solutions :

$$\mathcal{S}_{0,I} = \left\{ t \mapsto Ce^{-A(t)} \;\middle|\; C \in \mathbb{K} \right\},$$

où A est une primitive de a sur I.

Exemple 2.2

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle $y' + (\tan x)y = 0$.

2 b) Recherche de solution particulière : méthode de variation de la constante

2 b).1 Aspects pratiques

Lorsqu'on recherche une solution particulière, on commence par vérifier que l'équation n'admet pas de solution « évidente » . Par exemple :

— si le second membre est une constante, on cherche une solution particulière constante,

— si le second membre est une fonction polynomiale, on cherche une solution particulière polynomiale,

— si le second membre est une fonction de la forme $P(x)e^{\lambda x}$, on cherche une solution particulière du même type.

Dans le cas particulier où les coefficients de l'équation différentielle sont constants, on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème 2.3

Soient a, b, ω, α des scalaires, et P un polynôme.

i) *Si $a \neq 0$, l'équation $y' + ay = b$ admet une solution particulière constante : $x \mapsto \dfrac{b}{a}$.*

ii) *L'équation $y' + ay = P(x)e^{\alpha x}$ admet une solution particulière de la forme :*
- *$x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$, où Q est un polynôme de même degré que P, si $\alpha \neq -a$.*
- *$x \mapsto xQ(x)e^{\alpha x}$, où Q est un polynôme de même degré que P, si $\alpha = -a$.*

iii) *Les équations $y' + ay = P(x)\cos(\omega x)$ et $y' + ay = P(x)\sin(\omega x)$ admettent une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)\cos(\omega x) + R(x)\sin(\omega x)$, où Q et R sont des polynômes de degré inférieur ou égal à celui de P.*

Exemple 2.4
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2y = x^3 + x - 1$.

Lorsqu'il n'apparaît aucune solution évidente, on emploie la méthode de la variation de la constante : cette méthode implique le calcul d'une primitive, qui peut s'avérer délicat.

Exemple 2.5
On considère la fonction $y_P : t \mapsto C(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ où C est une fonction de I dans $\mathbb{K}$, dérivable. A quelle condition sur C, y_P est-elle une solution de (E) ?

Remarques 2.6

i) Comme on procède par équivalences dans la méthode de variation de la constante, cette méthode permet de déterminer toutes les solutions de (E), sans utiliser le théorème 1.5.

ii) La méthode de variations de la constante peut-être vue comme une méthode de changement de fonction inconnue. Elle peut, par exemple, être utilisée pour résoudre une équation différentielle linéaire homogène du second ordre pour laquelle on connaît une solution.

Exemple 2.7
Soit (E) l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $I =]0, \pi[$:

$$(E) \ : \ y' + \frac{1}{\sin x} y = \frac{1}{2}$$

Exemple 2.8
Soit $(E) : x^2 y'' - xy' + y = 0$.

i) Vérifier que la fonction $\varphi : x \mapsto x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

ii) En utilisant la méthode de variation de la constante déterminer les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

2 b).2 Aspects théoriques

On donne le théorème très général suivant qui ne servira que dans des exercices plus théoriques et donne une expression d'une solution particulière :

Proposition 2.9

Soit $t_0 \in I$. La fonction, définie sur I par

$$y_0 : t \mapsto e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} d(x)\, e^{A(x)}\ dx$$

*est une **solution particulière** de l'équation avec second membre*

$$y' + a(t)\, y = d(t)$$

où A est une primitive de a sur I.

2 c) Problème de Cauchy

Théorème 2.10

*Soit $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution au **problème de Cauchy***

$$\begin{cases} y' + a(t)\, y = d(t) & \text{sur } I, \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Exemple 2.11

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{x^2+1} y = \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x^2+1}}$ où $y(1) = 0$.

2 d) Principe de recollement des solutions

On peut, dans un cadre général, écrire une équation différentielle

$$a_1(x)y + a_2(x)y = d(x).$$

On se ramène au cas précédent lorsque en résolvant l'équation sur les intervalles où a_1 ne s'annule pas. On doit ensuite examiner si la solution est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur les intervalles où a_1 et a_2 sont définis. On ne donnera pas dans cette partie de théorème précis mais on pourra retenir la méthode de l'exemple suivant :

Exemple 2.12

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - \dfrac{1}{2} y = x$, en étudiant celle-ci sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.