Chapitre A8 : Matrices et systèmes linéaires

1 Matrices

Dans tout le chapitre $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 a) Définitions

Définition 1.1

On appelle ***matrice à*** n ***lignes et*** p ***colonnes*** *une application de* $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ *dans* $\mathbb{K}$ *qu'on représente sous la forme d'un tableau à* n *lignes et* p *colonnes. Si* A *est une matrice à* n *lignes et* p *colonnes, on note*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où pour $i \in [\![1, n]\!]$ *et* $j \in [\![1, p]\!]$, $a_{i,j}$ *est le* ***coefficient de la matrice*** A *à la ligne* i *et à la colonne* j.

Définition 1.2

L'ensemble des matrices à n *lignes et* p *colonnes se note* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et pour tout* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *on note*

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$$

ou $A = (a_{i,j})$ *lorsque qu'il n'y pas d'ambiguïté sur* n *et* p.

Exemple 1.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ e & 1.2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \end{pmatrix}$$

sont des matrices respectivement à deux lignes et deux colonnes et à une ligne et deux colonnes.

1 b) Matrices particulières

Définition 1.4

On appelle :

(i) ***matrice nulle****, la matrice de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients sont des* 0 *et on la note* $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$, $0_{n,p}$ *ou* 0 *;*

(ii) ***matrice colonne*** *toute matrice de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *;*

(iii) ***matrice ligne*** *toute matrice de* $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.5
Dans l'exemple précédent, B est une matrice ligne.

Remarque 1.6
Les matrices colonnes permettent aussi d'écrire les coordonnées de vecteurs et on identifiera parfois ces matrices directement avec les vecteurs.

1 c) Matrices carrées

Définition 1.7

Lorsque $n = p$, tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelé ***matrice carrée d'ordre*** *n. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Définition 1.8

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les éléments $a_{i,i}$ sont appelés ***coefficients diagonaux*** de A.

(ii) Lorsque tous les coefficients non diagonaux de A sont nuls, on dit que A est une ***matrice diagonale*** *: A est diagonale lorsque pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j \implies a_{i,j} = 0$.*

(iii) La matrice diagonale n'ayant que des 1 sur la diagonale est la ***matrice identité*** *notée I_n.*

(iv) Lorsque seuls les coefficients en-dessous (respectivement au-dessus) de la diagonale de A sont nuls : on dit que A est ***une matrice triangulaire supérieure*** (respectivement ***triangulaire inférieure***) *: A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) lorsque $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i > j$ (resp. $i < j$) $\implies a_{i,j} = 0$.*

Remarque 1.9

On parle de matrice triangulaire supérieure stricte lorsque la diagonale est nulle

Exemple 1.10

Par exemple, en posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pi & 4 \\ 0 & 1.2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \pi & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice A est triangulaire supérieure et B triangulaire supérieure stricte.

1 d) Opérations sur les matrices

Définition 1.11

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit la somme des deux matrices A et B et le produit d'une matrice par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda\, a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}.$$

Remarque 1.12

On prendra garde au fait qu'on somme des matrices de mêmes tailles.

Avec la définition précédente, on a immédiatement les propriétés :

Proposition 1.13

Soit $A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :

(i) $A + B = B + A$;

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(iii) $A + 0_{n,p} = A$;

(iv) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

(v) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

(vi) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Définition 1.14

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle opposé de A, la matrice $-1\,A = -A$ et on a : $-A + A = A - A = 0_{n,p}$.

Proposition 1.15

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p(\mathbb{R})}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $\lambda A = 0_{n,p} \iff \lambda = 0 \quad ou \quad A = 0_{n,p}$.

Définition 1.16

On appelle base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la famille de matrice $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ où pour tous $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,p]\!]$, $E_{i,j}$ est composée uniquement de 0 sauf en ligne i et à la colonne j où le coefficient est 1.

Exemple 1.17
Ecrivons la base canonique de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

Proposition 1.18

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}$.

Remarque 1.19
Toute matrice A est donc une combinaison linéaire des matrices de la base canonique.

1 e) Produit de deux matrices

Définition 1.20

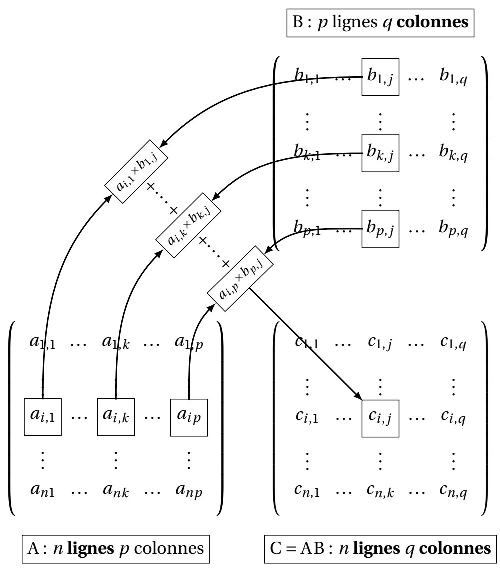
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, appelée produit de la matrice A par B, la matrice vérifiant

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}$$

qu'on note

$$C = A \times B \text{ ou } C = AB.$$

Écriture pratique :



Exemple 1.21
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer, lorsque c'est possible, pour $i, j = 1, 2, 3$ les produits matriciels $A_i\, A_j$ avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Remarque 1.22
De façon générale, on peut avoir $AB \neq BA$ et AB peut être nul sans que A et B ne le soient.

Exemple 1.23
Pour tous $i \in [\![1, n]\!]$, $j, k \in [\![1, p]\!]$, $\ell \in [\![1, q]\!]$, montrer que $E_{i,j}E_{k,\ell} = E_{i,\ell}$ si $j = k$ et $0_{n,q}$ sinon.

Proposition 1.24

Pour toutes matrices A, B, C telles que les produits sont bien définis :

(i) $A(B + C) = AB + AC$ *et* $(A + B)C = AC + BC$;

(ii) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$;

(iii) $I_n A = A = AI_p$;

(iv) $(AB)C = A(BC)$.

Proposition 1.25

Le produit de deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) est diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure).

1 f) Puissances d'une matrice carrée

Définition 1.26

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A^0 = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence : $A^{k+1} = A^k A = AA^k$.

Exemple 1.27
Calculer, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, A^2 et A^3 où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.28
Dans l'exemple précédent, A^3 est nulle même lorsque A n'est pas nulle.

Proposition 1.29

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k, \ell \in \mathbb{N}$ On a : $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$, $(A^k)^\ell = A^{k\,\ell}$ et $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.

Théorème 1.30 (*Formule du binôme de Newton*)

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si

$$AB = BA$$

alors, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k\, B^{n-k}$$

Exemple 1.31
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1 g) Transposition

Définition 1.32

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle matrice ***transposée*** *de A la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par*

$$A^T = (a_{j,i}).$$

Exemple 1.33
Écrivons la transposée de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Définition 1.34

Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $(\lambda\, A + B)^T = \lambda\, A^T + B^T$;

(ii) $\left(A^T\right)^T = A$.

Proposition 1.35

Pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a : $(AB)^T = B^T\, A^T$.

Définition 1.36

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que

1. *A est* ***symétrique*** *si $A^T = A$;*
2. *A est* ***antisymétrique*** *si $A^T = -A$.*

Exemple 1.37
Donner une matrice symétrique et une matrice antisymétrique à 3 lignes et 3 colonnes.

Proposition 1.38

Toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2 Systèmes linéaires

2 a) Définitions

Définition 2.1

*On appelle **système d'équations linéaires**, tout système de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où

- *pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, les nombres $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ sont appelés les **coefficients** du système ;*
- *le n-uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système ;*
- *pour $j \in [\![1, p]\!]$, les $x_j \in \mathbb{R}$ sont appelées les **inconnues** du système ;*
- *pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'équation $a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_i$ est appelée **ligne numéro** i du système et sera notée L_i.*

*On dit en particulier que (S) est un **système de** n **équations à** p **inconnues**.*

Exemple 2.2

Écrivons l'ensemble des solutions du système : le système, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccc} x + y & = & 1 \\ x - y & = & 3 \end{array}\right.$$

Définition 2.3

*On appelle **système homogène associé à** (S) et noté (S_H) le système ayant les mêmes coefficients que (S) mais un second membre nul.*

Remarque 2.4

$(0, \cdots, 0)$ est toujours solution du système homogène.

2 b) Écriture matricielle d'un système linéaire

Proposition 2.5

Avec les notations de la définition précédente, en posant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

le système linéaire précédent s'écrit

$$A\,X = B$$

et on appelle

- *A la matrice des coefficients ;*
- *B le vecteur second membre.*

Exemple 2.6
Réécrire le système de l'exemple précédent sous forme matricielle.

2 c) Opérations élémentaires

Pour résoudre un système linéaire, on effectuera **uniquement** les opérations suivantes :

Définition 2.7

Soit (S) un système linéaire de n équations et p inconnues. On peut effectuer, si $i, j \in [\![1, n]\!]$, sur un système ou sur sa matrice augmentée associée, les opérations suivantes :

(i) échanger les lignes L_i et L_j : on note $L_i \leftrightarrow L_j$;

*(ii) multiplier la ligne L_i par une constante **non nulle** $\lambda \in \mathbb{R}^*$: on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$;*

(iii) ajouter à ligne i un multiple d'une autre ligne j : pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $(i \neq j)$.

Exemple 2.8
Résolvons le système, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + 10z & = & 5 \\ 2x + 2y - z & = & 2 \\ -x + y + z & = & -3 \end{array} \right.$$

Définition 2.9

- *Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $(S) \Leftrightarrow (S')$.*
- *Deux matrices A et A' sont dites **équivalentes en ligne** si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \underset{L}{\sim} A'$.*

Théorème 2.10

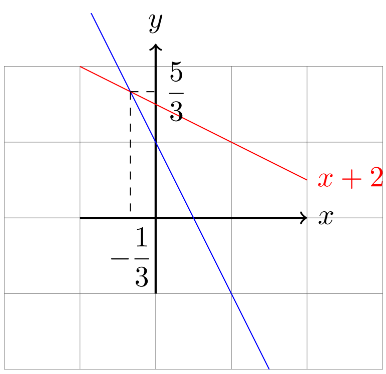
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

2 d) Exemples de résolution et interprétation géométrique des systèmes linéaires

Exemple 2.11

Résolvons le système, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$: $(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ x + 2y & = & 3 \end{array} \right.$

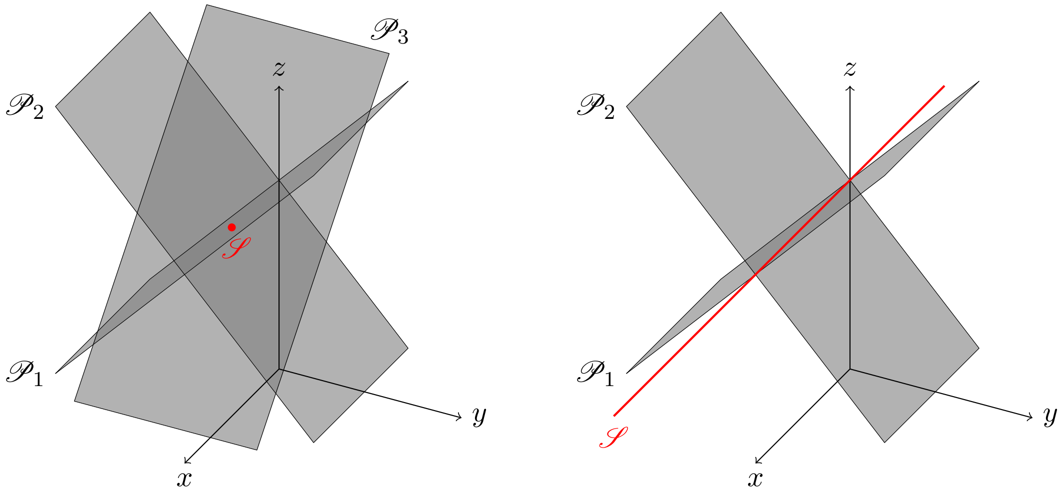
Graphiquement, les droites se coupent en un point dont les coordonnées sont l'unique solution :



Exemple 2.12
Résolvons les systèmes, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} z-y &=& 1 \\ y+z &=& 1 \\ 2x+2z &=& 3 \end{array}\right. \qquad (S)\left\{\begin{array}{rcl} z-y &=& 1 \\ y+z &=& 1 \end{array}\right.$$

Graphiquement, on peut traduire ceci de la manière suivante :



3 Résolution des systèmes linéaires

3 a) Systèmes échelonnés

Définition 3.1 (*Matrice échelonnée*)

Une matrice est dite ***échelonnée par lignes*** *si elle vérifie les deux propriétés :*

(i) si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;

(ii) à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé strictement à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Soit A une matrice de à n lignes et p colonnes échelonnée par lignes. On peut traduire la définition précédente de la façon suivante : il existe un entier r avec $0 \leq r \leq \min(n,p)$ et des entiers $j_1, \dots j_r$ vérifiant

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq p$$

telle que la matrice A ait la forme en escalier :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,j_1} & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,j_2} & & & & \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{r,j_r} & \cdots & a_{r,p} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $a_{i,j_i} \neq 0$.

Définition 3.2 (*Pivot*)

*Les premiers coefficients non nuls de chaque ligne non nulle sont appelés les **pivots** de la matrice et on appelle **rang** le nombre de pivots.*

Dans le schéma précédent, les pivots sont les coefficients $a_{1,j_1}, \dots, a_{r,j_r}$. En particulier, une matrice triangulaire supérieure est une matrice échelonnée.

Définition 3.3

- *Une matrice est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est échelonnée par lignes, si tous les pivots sont égaux à 1 et si tous les coefficients au dessus de chaque pivot sont nuls.*
- *Un système linéaire est dit échelonné par lignes (respectivement échelonné réduit par lignes) si sa matrice des coefficients l'est.*

Exemple 3.4

(i) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont échelonnées par lignes. En particulier, les pivots sont encadrés.

En revanche, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas échelonnées.

(ii) Les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y + t & = & 1 \\ z + t & = & 2 \\ z & = & 3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y + t & = & 1 \\ y + z + t & = & 2 \\ t & = & 4 \\ 0 & = & 2 \end{array} \right.$$

sont échelonnés par lignes (le second système n'ayant bien évidemment pas de solution puisque la dernière équation du second système est fausse).

(iii) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & \pi \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \ln 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont échelonnées réduites par lignes. En particulier, les pivots sont encadrés.

(iv) Les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \\ z & = & 2 \\ t & = & 4 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \\ z + t & = & 2 \\ t & = & 4 \\ 0 & = & 8 \end{array} \right.$$

sont échelonnés réduits par lignes (le second système n'ayant bien évidemment pas de solution puisque la dernière équation du second système est fausse).

Définition 3.5

Soit (S) un système échelonné par lignes et A sa matrice des coefficients de la forme de la page précédente. On a les définitions suivantes :

- *r s'appelle le **rang** du système (S) ou de la matrice A. C'est le nombre pivots.*
- *Les lignes L_1, L_2, $\ldots L_r$ sont appelées **équations principales** et les autres lignes, L_{r+1}, $\ldots$, L_n, **équations de compatibilité**.*
- *Les inconnues x_{j_1}, x_{j_2}, $\ldots$, x_{j_r} sont appelées **inconnues principales**. Les autres inconnues sont appelées **inconnues secondaires**.*

Exemple 3.6

Résolvons les deux systèmes échelonnés d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+z &=& 1 \\ z+t &=& 2 \\ t &=& 3 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+t &=& 1 \\ y+z+t &=& 2a \\ 0 &=& a \end{array}\right.$$

3 b) Algorithme du pivot de Gauss

Théorème 3.7 (*Algorithme de Gauss-Jordan*)

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné par lignes.

Par définition d'un système équivalent, ceci signifie qu'on peut transformer, par des opérations élémentaires, n'importe quel système linéaire en un système échelonné par lignes. Le procédé pour effectuer cette transformation, qui sera utilisé dans la démonstration, est appelé **algorithme de Gauss-Jordan**.

Remarque 3.8

Le théorème précédent peut s'énoncer sous la forme suivante : tout matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée par lignes. C'est sous cette forme qu'on va démontrer le théorème.

3 c) Structure des solutions

On rappelle que si (S) est un système linéaire, son système homogène associé (S_H) est le système linéaire ayant les mêmes coefficients que (S) mais dont le second membre est nul.

Théorème 3.9

*Soit (S) un système de n équations à p inconnues **compatible** et (S_H) son système homogène associé. Notons $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ une solution particulière de (S).*

Toute solution de (S) est la somme de $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ et d'une solution de (S_H).

Avec les notations du théorème, si $\mathscr{S}$ est l'ensemble des solutions de (S) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de S_H, on a : pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$(x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{S} \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_p) - (x_1^0, \ldots, x_p^0) \in \mathscr{S}_0.$$

Exemple 3.10

Résolvons le système, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 1 \\ x+3y+z &=& 2 \end{array}\right.$$

Proposition 3.11 (*Structure des solutions d'un système homogène*)

Soit (S_H) un système linéaire **homogène** *à n équations et p inconnues dont l'ensemble des solutions est noté $\mathscr{S}_0$. On a les propriétés suivantes :*

(i) $(0,\dots,0) \in \mathscr{S}_0$;

(ii) pour tout $(x_1,\dots,x_p) \in \mathscr{S}_0$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a* $\lambda\,(x_1,\dots,x_p) = (\lambda\,x_1,\dots,\lambda\,x_p) \in \mathscr{S}_0$;

(iii) pour tous $(x_1,\dots,x_p),(y_1,\dots,y_p) \in \mathscr{S}_0$, *on a*

$$(x_1,\dots,x_p)+(y_1,\dots,y_p) = (x_1+y_1,\dots,x_p+y_p) \in \mathscr{S}_0.$$

Remarque 3.12

On verra, plus tard dans l'année, que la proposition précédente signifie que l'ensemble des solutions d'un système homogène est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 3.13

Soit $\alpha, a \in \mathbb{R}$ des réels fixés. Résolvons le système, d'inconnues $x,y,z \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S_{\alpha,a}) \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-2\,z &=& 0 \\ x-2\,y+z &=& 0 \\ \alpha\,x+y+z &=& a \end{array} \right. .$$

Exemple 3.14

On traite la résolution des exemples suivants :

(i) le système d'inconnues $u,v,w \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl} u+v-3\,w &=& -6 \\ 2\,v-w &=& 1 \\ -2\,u-4\,v+3\,w &=& -1 \end{array} \right. ;$$

(ii) les systèmes d'inconnues $x,y,z \in \mathbb{R}$, où a,b,c sont des paramètres réels fixés donnés par

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{rcl} x+2\,y-3\,z &=& 4 \\ x+3\,y+z &=& 11 \\ 2\,x+5\,y-4\,z &=& 13 \\ 4\,x+11\,y &=& 38 \end{array} \right. ; \quad (S_3) \left\{ \begin{array}{rcl} x-3\,y+7z &=& 1 \\ x+2\,y-3\,z &=& 0 \\ 7\,x+4\,y-z &=& 2 \end{array} \right. ; \quad (S_{a,b,c}) \left\{ \begin{array}{rcl} x-3\,y+7z &=& a \\ x+2\,y-3\,z &=& b \\ 7\,x+4\,y-z &=& c \end{array} \right. .$$

4 Matrices inversibles

4 a) Définition, propriétés

Définition 4.1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est **inversible** *s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Dans ce cas B est unique et on note : $\quad B = A^{-1}.$

Remarque 4.2

On fera bien attention à ne jamais diviser par une matrice, ce qui n'aurait pas de sens a priori.

Exemple 4.3

La matrice identité est-elle inversible ?

Proposition 4.4

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a les propriétés :

(i) si A est inversible, A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

(ii) si A, B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(iii) si A est inversible, alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Exemple 4.5

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + 2A + 2I_n = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

4 b) Critères d'inversibilité

Théorème 4.6

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre les énoncés :

(i) A est inversible ;

(ii) le système linéaire d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $AX = O$ n'admet que la solution nulle ;

(iii) le rang de A vaut n.

Ce théorème ne peut pas être démontré pour le moment mais le sera plus tard dans l'année.

Exemple 4.7

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 4 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad C_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On donnera une condition sur le réel m et on calculera D^2.