Chapitre A7 : Équations dans $\mathbb{C}$

1 Fonctions polynomiales

Dans cette section, on rappelle rapidement la notion de fonction polynomiale et de racine. $\mathbb{K}$ désignera l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

i) Une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n est une fonction P définie sur $\mathbb{K}$ de la forme :

$$P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$. Par convention, la fonction nulle est polynomiale de degré $-\infty$.

*ii) Soit P une fonction polynomiale à cœfficients dans $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est une **racine** de P si $P(\alpha) = 0$.*

On rappelle la formule de la somme géométrique et une extension de celle-ci.

Proposition 1.2

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z, a, b \in \mathbb{C}$. On a :

$$i)\ z^n - 1 = (z-1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k, \qquad ii)\ \text{si } n \geqslant 1,\ a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Exemple 1.3
Factoriser, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $a^3 - b^3$ et $a^3 + b^3$.

Le résultat suivant permet de factoriser un polynôme lorsqu'on en connaît une racine.

Théorème 1.4

Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $n > 0$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Si α est une racine de P, alors il existe une fonction polynomiale Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $n-1$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{K},\ P(z) = (z - \alpha) Q(z).$$

2 Racines n-ièmes d'un complexe non nul

2 a) Racines de l'unité

Dans cette section, on considère un entier naturel non nul n.

Définition 2.1

On appelle racine n-ième de l'unité toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. On note alors $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}.$$

Exemple 2.2
Déterminer $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ et $\mathbb{U}_4$.

Remarque 2.3
On a les résultats suivants :

i) $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$,

ii) $\mathbb{U}_n$ est stable par multiplication : $\forall (z,z') \in \mathbb{U}_n^2,\ zz' \in \mathbb{U}_n$,

iii) $\mathbb{U}_n$ est stable par passage à l'inverse et conjugaison : $\forall z \in \mathbb{U}_n,\ \dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}_n$,

Théorème 2.4

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$i)\ z \in \mathbb{U}_n \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad ii)\ \mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exemple 2.5
Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^3 = i$. On écrira les solutions sous forme algébrique et exponentielle.

Nous avons besoin du théorème de la division euclidienne pour démontrer le résultat qui suit.

Théorème 2.6 (*Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$*)

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $b \neq 0$. Il existe un unique couple d'entiers $(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

i) $a = bq + r$;

ii) $0 \leqslant r < |b|$.

On dit alors que q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.

Théorème 2.7

i) $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

ii) *Posons* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. *Alors :* $\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

iii) $\mathbb{U}_n$ *contient exactement n éléments.*

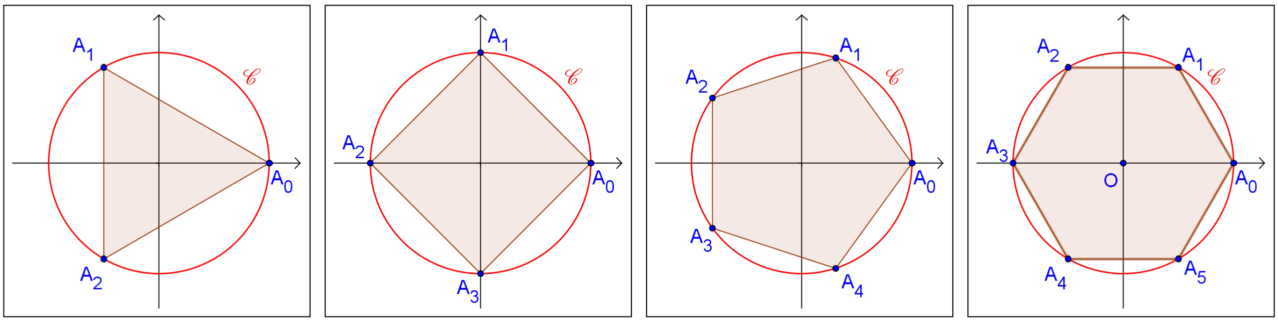
Théorème 2.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On a :

$$\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \begin{cases} 0 & si\ n \neq 1 \\ 1 & si\ n = 1 \end{cases}$$

Théorème 2.9

Pour $n \geqslant 3$, les points dont l'affixe est dans $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique (cf. figure ci dessous).



$\mathbb{U}_3$ $\mathbb{U}_4$ $\mathbb{U}_5$ $\mathbb{U}_6$

Points dont les affixes sont dans $\mathbb{U}_n$.

2 b) Cas général

Définition 2.10

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que z est une racine n-ième de a si $z^n = a$.

Proposition 2.11

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Si b est une racine n-ième quelconque de a, alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des racines n-ièmes de a est :

$$\mathscr{S} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = a\} = \{b\omega \mid \omega \in \mathbb{U}_n\}.$$

Exemple 2.12

Résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $z^4 = 1 + i$.

Proposition 2.13

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Si $n \geqslant 3$, alors les points dont les affixes sont les solutions de l'équation $z^n = a$ sont les sommets d'un polygone régulier centré en O.

3 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la résolution des équations polynomiales du second degré à coefficients complexes. Nous allons, tout d'abord, avoir besoin de calculer les « racines carrées » d'un nombre complexe.

Définition 3.1

Soit $a \in \mathbb{C}$. Une solution de l'équation $z^2 = a$ est appelée ***racine carré*** *de a.*

Exemple 3.2

1. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $1 + i$.
2. Résoudre ainsi l'équation d'inconnue $\delta \in \mathbb{C}$: $z^2 = 1 + i$ en exprimant les solutions sous forme exponentielle.
3. Résoudre l'équation d'inconnue $\delta \in \mathbb{C}$: $z^2 = 1 + i$ en exprimant les solutions sous forme algébrique.
4. Déterminer finalement une formule pour $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Proposition 3.3

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Le nombre complexe a admet deux exactement deux racines carrées qui sont opposées l'une de l'autre ce qui signifie que si b est une racine de a, l'autre racine de a est $-b$.

Remarque 3.4
La démonstration précédente est générale mais ne donne pas la méthode lorsqu'on souhaite déterminer les solutions sous forme algébrique : on retiendra donc l'exemple qui précède cette proposition.

Théorème 3.5

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ possède deux racines carrées opposées dans $\mathbb{C}$. Notons les δ et $-\delta$. On a :

i) Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) possède exactement deux solutions (ou racines) :

$$z_1 = \frac{\delta - b}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\delta - b}{2a}.$$

ii) Si $\Delta = 0$, l'équation (E) possède une unique solution : $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$. On dit alors que (E) a une racine double.

iii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Dans le cas particulier où les coefficients a, b et c sont réels, Δ est alors lui aussi réel.

i) Si $\Delta > 0$, alors $\pm\delta \in \mathbb{R}$ et les deux racines de (E) sont distinctes et réelles.

ii) Si $\Delta = 0$, la racine double de (E) est réelle.

iii) Si $\Delta < 0$, alors $\delta = \pm i\sqrt{-\Delta}$, et les deux racines de (E) sont distinctes et conjuguées.

Exemple 3.6
Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - (4 + i)z + 5 + 5i = 0.$$

On exprimera les solutions sous forme algébrique.

On a enfin le résultat suivant.

Théorème 3.7 (*Relations coefficients-racines*)

Soient trois complexes a, b, c tels que $a \neq 0$. Quels que soient les complexes α, β on a :

$$\Big[\forall z \in \mathbb{C},\ az^2 + bz + c = a(z - \alpha)(z - \beta)\Big] \iff \begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Remarque 3.8
Si l'on connait la somme S et le produit P de deux complexes, il suffit donc de résoudre l'équation $z^2 - Sz + P = 0$ pour calculer ceux-ci (pour le prouver il suffit de prendre $a = 1$ dans l'énoncé précédent).