Chapitre A6 : Suites usuelles et calculs algébriques

1 Généralités sur les suites

1 a) Définition

Intuitivement une suite numérique est une séquence de nombres, rangés suivant un certain ordre qui sera matérialisé par l'association d'un numéro à chacun d'eux. On peut donner la définition générale suivante d'une suite d'objets mathématiques quelconques.

Définition 1.1

Soit A un ensemble. Une suite d'éléments de A est une application $u : \mathbb{N} \to A$. L'ensemble des suites d'éléments de A est noté $A^{\mathbb{N}}$.

Notation 1.2

Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow A$ une suite. La suite u sera alors notée (u_n), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$. En outre, u_n désignera le n-ième terme de celle-ci, c'est-à-dire l'élément $u(n)$ de A, et sera appelé le **terme général** de la suite.

Remarque 1.3

i) Dans la suite, nous ne considérerons que des suites définies sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire des suites de la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais bien entendu les résultats donnés seront également valables pour des suites définies à partir de n'importe quel entiers, comme par exemple des suites de la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

ii) Lorsque $A = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dira que l'on a affaire à une **suite numérique**.

Dans le reste de cette partie, on considérera des suites de réels.

1 b) Monotonie

Définition 1.4

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

i) ***croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$;*

ii) ***strictement croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$;*

iii) ***décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$;*

iv) ***strictement décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$;*

v) ***monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.*

On a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1.5

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **strictement positifs**. On a les assertions :*

i) *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$;*

ii) *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$;*

iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si et seulement si :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ *;*

iv) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante si et seulement si :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Exemple 1.6
Déterminer, dans chaque cas, la monotonie éventuelle de la suite (u_n) (définie à partir d'un certain rang) lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $u_n = (-1)^n$;
2. $u_n = ne^{-n}$;
3. $u_n = q^n$ (où $q \in \mathbb{R}^{+,*}$) ;
4. $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$;
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $(n \geq 1)$;
6. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n \geq 1)$.

1 c) Caractère borné

Définition 1.7

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite :*

i) ***minorée*** *lorsqu'il existe un réel* m *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$ *;*

ii) ***majorée*** *lorsqu'il existe un réel* M *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$ *;*

iii) ***bornée*** *lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.*

On a enfin le résultat suivant.

Théorème 1.8

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si et seulement si la suite* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

Exemple 1.9
Déterminer si, dans chaque cas, la suite (u_n) (définie à partir d'une certain rang) est bornée lorsque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

1. $u_n = (-1)^n$;
2. $u_n = \mathrm{Arctan}(n)$;
3. $u_n = (-1)^n \times n$;
4. $u_n = ne^{-n}$;
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $(n \geq 1)$.

2 Suites récurrentes usuelles

La manière la plus simple de définir une suite est de donner son terme général u_n en fonction de n. On dit alors que la suite est définie explicitement. Mais une suite peut également être définie par la donnée de ses premiers termes et d'une relation (valable pour tout n assez grand) entre le terme général de la suite et les termes précédents, comme par exemple :

i) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sin(u_{n-1})$ et $u_0 = 1$;

ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$.

Dans ce cas, on dit que l'on a affaire à une suite récurrente.

2 a) Suites arithmétiques

Définition 2.1

*Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une **suite arithmétique** lorsqu'il existe un complexe r tel que :*

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n + r.$$

*Le complexe r est appelé la **raison** de la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.*

On voit directement qu'une suite de premier terme u_{n_0} est arithmétique lorsqu'il existe $r \in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} - u_n = r$. Le complexe r est alors la raison de la suite.

Théorème 2.2

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison r. On a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$

2 b) Suites géométriques

Définition 2.3

*Soit n_0 un entier. Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est dite **géométrique** s'il existe un complexe q tel que :*

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = q \times u_n.$$

*Le complexe q est appelé la **raison** de la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.*

On voit directement qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ de termes non nuls est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$. le complexe q est alors la raison de la suite.

Théorème 2.4

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q. On a alors :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}.$$

2 c) Suites arithmético-géométriques

Définition 2.5

Soient a et b des nombres complexes et $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = a u_n + b.$$

Remarque 2.6

Si $a = 1$, on a affaire à une suite arithmétique, et si $b = 0$, la suite est géométrique.

Pour exprimer le terme général u_n d'une suite arithmético-géométrique en fonction de l'entier n, on utilise la méthode suivante (sauf si $a = 1$ ou $b = 0$: dans ce cas on utilise les formules relatives aux suites arithmétiques et géométriques).

Méthode 2.7 (Expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique)
Considérons une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 vérifiant la relation suivante, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Pour pouvoir exprimer u_n en fonction de n et u_0, nous allons introduire une suite intermédiaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell,$$

où ℓ est un nombre complexe que l'on cherche de telle sorte que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique. Le principe de cette méthode se résume donc en une seule phrase : « Cherchons un réel ℓ tel que la suite $v_n = u_n - \ell$ soit géométrique ». Posons donc $v_n = u_n - \ell$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell \\ &= a(v_n + \ell) + b - \ell = av_n + (a-1)\ell + b \end{aligned}$$

Pour que cette suite soit géométrique, il faut et il suffit donc que l'on ait $(a-1)\ell + b = 0$, c'est-à-dire $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ puisque $a \neq 1$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique, on en déduit la relation $v_n = a^n v_0$. L'égalité $v_n = u_n - \ell$ donne ensuite $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$, soit en remplaçant ℓ par sa valeur :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} = a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

Exemple 2.8
Donner en fonction de n le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$.

2 d) Suites récurrentes linéaires d'ordre deux à coefficients constants

Définition 2.9

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle suite récurrente linéaire d'ordre deux à coefficients constants toute suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifiant une relation de la forme :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Nous allons maintenant donner une méthode permettant d'exprimer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux en fonction des deux premiers termes.

Définition 2.10

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle alors ***équation caractéristique****, l'équation suivante, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$:*

$$r^2 = ar + b.$$

Théorème 2.11

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

i) Si l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$ admet deux racines réelles (resp. complexes conjuguées) distinctes r_1, r_2, alors il existe des réels (resp. des complexes) λ, μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

ii) Si l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$ admet une unique racine réelle r (et $r \neq 0$), alors il existe des réels λ, μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = (\lambda n + \mu)r^n.$$

Dans les deux cas, les coefficients λ et μ peuvent être calculés en fonction des deux premiers termes u_0 et u_1.

Remarque 2.12
On dispose d'un résultat analogue dans le cas où a et b sont des complexes.

Exemple 2.13

1. Calculer le terme général de la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

2. Calculer le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} = -v_n.$$

3 Sommes et produits

3 a) Généralités

Notation 3.1
Soit $n, p \in \mathbb{Z}$, avec $n \leqslant p$. On note $[\![n, p]\!]$ l'ensemble des nombres entiers compris entre n et p :

$$[\![n, p]\!] = \{x \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x \leqslant p\} = [n, p] \cap \mathbb{Z}.$$

Définition 3.2

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I, un ensemble fini. La somme de ces nombres complexes est notée $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ et leur produit $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$. En particulier, si $I = [\![n, p]\!]$, on a :

$$\sum_{i=n}^{p} a_i = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{p-1} + a_p$$
$$\prod_{i=n}^{p} a_i = a_n \times a_{n+1} \times \cdots \times a_{p-1} \times a_p.$$

Remarques 3.3

i) L'utilisation des points de suspension peut aider à la compréhension, mais peut parfois induire en erreur.

ii) Dans l'expression $\sum_{i=n}^{p} a_i$, la variable i (appelée l'**indice de sommation**) n'a aucun sens en dehors de la somme, de la même manière que la variable x dans l'expression $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. On peut donc changer le nom de cette variable sans changer la valeur de la somme. On dit que i et x sont ici des variables muettes.

iii) Par convention, si l'ensemble d'indice est vide, la somme vaut 0 et le produit vaut 1.

Exemple 3.4
Déterminer une expression simples des quantités suivantes lorsque $n \in \mathbb{N}^*$:

i) $\sum_{i=3}^{5} i$;

ii) $\sum_{i=2}^{4} i^2$;

iii) $\sum_{i\in I} (i^2 - i)$ où $I = \{1, 3, 7, 4\}$;

iv) $\prod_{i=1}^{5} (5 - i)$.

Les propriétés algébriques de la somme et du produit sont les suivantes.

Théorème 3.5

Soient $(a_i)_{i\in E}$ et $(b_i)_{i\in E}$ deux familles finies de nombres complexes.

i) Si I et J sont deux parties disjointes (c'est-à-dire que $I \cap J = \varnothing$) de E, alors :

$$\sum_{i\in I\cup J} a_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in J} a_i, \qquad \prod_{i\in I\cup J} a_i = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in J} a_i.$$

En particulier, si $E = [\![0, n+p]\!]$, $I = [\![0, n]\!]$ et $J = [\![n+1, n+p]\!]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+p} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k, \qquad \prod_{k=0}^{n+p} a_k = \prod_{k=0}^{n} a_k \times \prod_{k=n+1}^{n+p} a_k.$$

ii) On a :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \sum_{i\in E} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in E} a_i + \mu \sum_{i\in E} b_i.$$

Exemple 3.6

1. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=1}^{n} a$, $\sum_{k=0}^{n} a$, $\prod_{k=0}^{n} a$ et $\prod_{k=1}^{n} a$.

2. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$. Déterminer des formules pour, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{6} a_k, \quad \sum_{k=0}^{n+1} a_k, \quad \sum_{k=0}^{2n} a_k, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} a_k, \quad \sum_{k=0}^{n} (2a_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta).$$

Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ une expression simple de a_k.

3. On considère le produit, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Calculer P_1 et P_2.

Exemple 3.7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}, (b_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ des familles de nombres complexes et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, dans les formules suivantes, celles qui sont correctes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha + a_i) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$;
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i$;
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$;
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha}$;
6. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\alpha a_i) = \alpha \prod_{i=1}^{n} a_i$;
7. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} b_i$;
8. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i$.

Théorème 3.8

Soit $(a_i)_{i \in E}$ et $(b_i)_{i \in E}$ deux familles finies de nombres réels. Si pour tout $i \in E$, $a_i \leqslant b_i$, alors $\displaystyle\sum_{i \in E} a_i \leqslant \sum_{i \in E} b_i$ et si de plus, pour tout $i \in E$, $a_i, b_i \geqslant 0$ alors $\displaystyle\prod_{i \in E} a_i \leqslant \prod_{i \in E} b_i$.

Exemple 3.9

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire la limite de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

3 b) Changement d'indice et télescopage

Théorème 3.10 (*Translation de l'indice*)

Soient n, p des entiers et $(a_k)_{n \leqslant k \leqslant p}$ une famille de nombres complexes. On a alors les égalités suivantes :

$$\sum_{k=n}^{p} a_k = \sum_{i=0}^{p-n} a_{i+n}, \qquad \prod_{k=n}^{p} a_k = \prod_{i=0}^{p-n} a_{i+n}.$$

Lorsque l'on effectue cette opération, on dit que l'on pose $i = k - n$.

Le théorème ci-dessus ne parle en fait que d'un changement de notation, en effet en écrivant les deux termes avec des pointillés on voit qu'ils sont égaux. On dispose en fait d'un résultat plus général, qui indique que l'on peut sommer ou multiplier une famille de nombres complexes dans n'importe quelle ordre sans que cela change le résultat. Il sera vu ultérieurement, mais on peut déjà donner le résultat suivant, qui indique que l'on peut indifféremment sommer ou multiplier les termes de la famille suivant les indices croissants ou décroissants.

Théorème 3.11 (*Inversion de l'ordre de sommation*)

Soient n, p deux entiers et $(a_k)_{n \leqslant k \leqslant p}$ une famille de nombres complexes. On a alors les égalités suivantes :

$$\sum_{k=n}^{p} a_k = \sum_{i=n}^{p} a_{n+p-i}, \qquad \prod_{k=n}^{p} a_k = \prod_{i=n}^{p} a_{n+p-i}.$$

Lorsque l'on effectue cette opération, on dit que l'on pose $k = n + p - i$.

Théorème 3.12 (*Sommes téléscopiques*)

Soient n et p deux entiers et $(a_k)_{n \leqslant k \leqslant p}$ une famille de nombres complexes. On a

$$\sum_{k=n}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) = a_p - a_n.$$

Exemple 3.13

1. Déterminer une expression simple puis la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. Simplifier le produit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.

3 c) Sommes classiques

Théorème 3.14

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Théorème 3.15

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Exemple 3.16

Écrire des formules simples pour la somme des termes d'une suite arithmétique et la somme des termes d'une suite géométrique.

Exemple 3.17

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a + kx)$.

4 Coefficients binomiaux

4 a) Définition à l'aide de la factorielle

Définition 4.1

Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le coefficient binomial « k parmi n » est le nombre entier, noté $\binom{n}{k}$, défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarques 4.2

i) On verra plus tard dans l'année que $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire au nombre de manière de prélever simultanément k boules dans une urne en contenant n.

ii) Par convention, $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$.

Les coefficients binomiaux vérifient de nombreuses propriétés. En voici quelques-unes :

Proposition 4.3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors :

i) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

iii) Relation de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

iv) Si $k \neq -1$: $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.

4 b) Formule du binôme de Newton

Le premier intérêt des coefficients binomiaux est qu'ils permettent d'écrire la formule résultant du développement de $(a+b)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.4 (*Formule du binôme de Newton*)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 4.5

Développer, pour $a \in \mathbb{C}$, $(a - \sqrt{2})^7$.

Exemple 4.6

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ puis en déduire une formule simple pour
$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une formule simple pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

5 Sommes doubles

5 a) Sommation sur un rectangle

Dans cette section, on considère deux entiers n et p ; et une famille de nombres complexes $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ indéxés par deux entiers. On peut imaginer que les $a_{i,j}$ sont en fait les coefficients d'une matrice de taille $n \times p$.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & & \text{colonne } j & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\
 & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{ligne } i \rightarrow & a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p}
\end{array}$$

On cherche à calculer la somme des termes présents dans ce tableau, qui est alors appelée somme double et notée $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$. Puisque l'on peut sommer ces termes dans n'importe quel ordre, on a deux possibilités qui donnent le même résultat :

i) calculer d'abord la somme des termes sur chacune des lignes, puis faire le total. Formellement, on évalue dans ce cas la quantité :
$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right)}_{\substack{\text{somme des termes}\\ \text{de la ligne } i}} ;$$

ii) calculer d'abord la somme des termes sur chacune des colonnes, puis faire le total. Formellement, on évalue dans ce cas la quantité :
$$\sum_{j=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)}_{\substack{\text{somme des termes}\\ \text{de la colonne } j}} .$$

Théorème 5.1 (*Théorème de Fubini*)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille de nombres complexes. On a alors l'égalité suivante :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Notation 5.2
Cette somme peut aussi être notée $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$.

Méthode 5.3
Pour calculer une somme double $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$, on choisit d'abord un ordre : commencer soit par les lignes, soit par les colonnes. On peut par exemple calculer dans un premier temps la somme $s_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$, et ensuite la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right)$.

Exemple 5.4
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i+j}$.

Proposition 5.5

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\beta_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ deux familles de nombres complexes. On a alors l'égalité suivante :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \alpha_i\beta_j = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p}\beta_j\right)$$

Exemple 5.6
Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)i$.

Remarque 5.7
Plus généralement, on a le résultat suivant :
Soient I et J deux ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres complexes. On a :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

On dit aussi qu'on intervertit les symboles de sommation lorsqu'on utilise un théorème de Fubini. Cette interversion n'est pas toujours aussi simple à effectuer dans le cas où les bornes de la deuxième somme dépendent de l'indice de la première somme. C'est ce qu'on va voir dans un cas particulier dans la section qui suit.

5 b) Sommation sur un triangle

Imaginons maintenant que $p = n$ et qu'on a amputé le tableau précédent de sa moitié inférieure gauche, de sorte qu'il corresponde à une matrice triangulaire supérieure, comme suit :

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & \text{colonne } j & & \\
 & & & & & \downarrow & & \\
 & a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\
 & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
\text{ligne } i \rightarrow & & & a_{i,i} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\
 & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & a_{j,j} & & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & a_{n,n}
\end{array}
$$

Formellement, cela revient à considérer une famille $(a_{i,j})$ de nombre complexes indexée par l'ensemble $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$. Pour calculer la somme des termes présents dans ce tableau, que l'on notera $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j}$, on a les mêmes possibilités que dans le cas précédent :

i) calculer d'abord la somme des termes sur chacune des lignes (en remarquant que la ligne i possède les termes : $a_{i,i}, \ldots, a_{i,n}$), puis faire le total. Dans ce cas, on évalue :

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right)}_{\substack{\text{somme des termes} \\ \text{de la ligne } i}} \quad ;$$

ii) calculer d'abord la somme des termes sur chacune des colonnes (en remarquant que la colonne j possède les termes : $a_{1,j}, \ldots, a_{j,j}$), puis faire le total. On évalue donc dans ce cas :

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right)}_{\substack{\text{somme des termes} \\ \text{de la colonne } j}} \quad .$$

Théorème 5.8

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ une famille de nombres complexes. On a alors l'égalité suivante :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}.$$

On a enfin le résultat analogue suivant.

Exemple 5.9
Calculons la somme, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}.$$