Chapitre A5 : Équations différentielles à coefficients constants

On appelle équation différentielle toute relation liant une fonction inconnue à (certaines de) ses dérivées. Le but de ce chapitre est de présenter une famille d'équations différentielles simples et d'usage courant en physique, puis d'expliquer comment résoudre celles-ci. Dans la suite, le symbole $\mathbb{K}$ désignera l'un des deux ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (les résultats portant sur $\mathbb{K}$ seront en fait vrais dans les deux cas).

1 Équations d'ordre 1

1 a) Définition

Définition 1.1

Soit I un intervalle véritable de $\mathbb{R}$.

*i) On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** toute relation de la forme :*

$$(E) \ : \ y' + ay = f(x),$$

où $a \in \mathbb{K}$, y est une fonction dérivable inconnue de la variable x à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

*ii) Une **solution** de (E) sur I est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I vérifiant :*

$$\forall x \in I, \ y'(x) + ay(x) = f(x).$$

*iii) (E) est dite **homogène** si f est la fonction nulle.*

*iv) **L'équation homogène associée** à (E) est l'équation :*

$$(E_0) \ : \ y' + ay = 0.$$

Remarque 1.2

Considérons un mobile se déplaçant au cours du temps sur un axe gradué, dont la position est donnée par une fonction $t \mapsto y(t)$ (la vitesse instantanée du mobile à l'instant t est alors $y'(t)$). Le fait que y vérifie une équation différentielle du premier ordre exprime le fait qu'à un instant donné, il existe une relation entre la vitesse et la position du mobile. Plus précisément : si je connais la position du mobile alors je peux connaître sa vitesse, et inversement. Il s'agit d'une situation très courante en physique.

1 b) Résolution des équations homogènes

Théorème 1.3

Soit $a \in \mathbb{K}$. L'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de l'équation différentielle homogène (E_0) : $y' + ay = 0$ est l'ensemble des fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{-ax}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$. En d'autres termes, si $\mathscr{S}_0(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des solutions de (E_0) à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a :

$$\mathscr{S}_0(\mathbb{K}) = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-ax} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

Exemple 1.4
Soit $R, L \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (d'inconnue y)

$$(E) : Ly' + Ry = 0.$$

1 c) Cas général

Dans cette partie on considère une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants :

$$(E) \ : \ y' + ay = f(x),$$

avec $a \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On note (E_0) l'équation homogène associée à (E).

Le résultat suivant indique que pour trouver *toutes* les solutions d'une équation différentielle linéaire, il suffit d'en déterminer *une* seule solution particulière ainsi que *toutes* les solutions de l'équation homogène associée.

Théorème 1.5 (*Résolution des équations non homogènes*)

Soit y_0 une solution particulière de (E). Toute solution y de (E) s'écrit :

$$y = y_0 + y_h,$$

où y_h est une solution de (E_0).

Méthode 1.6
Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, il suffit de :

i) déterminer les solutions de l'équation homogène associée ;

ii) déterminer une solution particulière de l'équation ;

iii) faire la somme des deux pour obtenir la solution générale de l'équation.

Pour terminer il nous reste à expliquer comment déterminer une solution particulière d'une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants. On se contentera pour le moment de traiter un cas particulier simple (les théorèmes 2.12 et 2.17 permettent d'obtenir une solution particulière dans d'autres cas).

Supposons ici que le second membre de (E) (la fonction f) soit constant, égal à $E \in \mathbb{K}$:

$$(E) \ : \ y' + ay = E.$$

Théorème 1.7

Une solution particulière de l'équation différentielle (E) est :

i) *la fonction constante $y_0 : x \mapsto \dfrac{E}{a}$, si $a \neq 0$;*

ii) *la fonction $y_0 : x \mapsto Ex$, si $a = 0$.*

Exemple 1.8
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y' - 4y = 2$.

1 d) Existence et unicité de la solution à conditions initiales fixées

Revenons au cas général :

$$(E) : y' + ay = f(x),$$

avec $a \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Nous avons vu comment déterminer toutes les solutions de (E) sur I. Le théorème suivant montre que si on impose une condition initiale, alors (E) admet une unique solution.

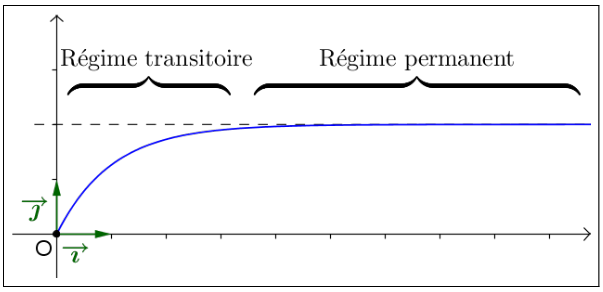
On admet le théorème suivant qui sera démontré dans le chapitre sur les équations différentielles d'ordre 1.

Théorème 1.9

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. L'équation (E) possède une unique solution y sur I qui vérifie $y(x_0) = y_0$.

1 e) Régime transitoire, régime permanent

Considérons l'équation différentielle $y' + y = 2$. Sa solution générale est $x \mapsto 2 + \lambda e^{-x}$. La figure ci-contre donne la courbe représentative de la solution $y_1 : x \mapsto 2 - 2e^{-x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Cette courbe admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote. On dit que la partie de la courbe qui semble confondu avec l'asymptote sur le dessin correspond au régime permanent. La partie de la courbe située à gauche de celle-ci correspond elle au régime transitoire.



En Sciences Physiques, on appelle régime transitoire le régime d'évolution d'un système en voie d'atteindre un état stable, ce dernier étant appelé régime permanent (ou établi). On voit sur l'exemple ci-dessus que le régime transitoire correspond à la solution générale de l'équation homogène, et le régime permanent correspond à la solution particulière (c'est là un résultat général, à retenir pour le cours de Physique-Chimie).

Le graphe ci-dessus correspond par exemple à celui donnant la valeur de la tension en fonction du temps dans un circuit RC (circuit électrique muni d'un générateur, d'une résistance et d'un condensateur), le générateur étant mis en service à l'instant initial. La présence d'un régime transitoire correspond au temps nécessaire à la charge du condensateur. En pratique, les physiciens considèrent que sur un tel circuit le régime transitoire dure le temps nécessaire à ce que la tension atteigne 63% de sa valeur finale.

2 Équations d'ordre 2

2 a) Définition

Définition 2.1

Soit I un intervalle véritable de $\mathbb{R}$.

*i) On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** toute relation de la forme :*

$$(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x),$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, y est une fonction inconnue deux fois dérivable de la variable x à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.

*ii) Une **solution** de (E) sur I est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I vérifiant :*

$$\forall x \in I,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x).$$

*iii) (E) est dite **homogène** si f est la fonction nulle.*

*iv) **L'équation homogène associée** à (E) est l'équation :*

$$(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0.$$

*v) On appelle **équation caractéristique associée** à (E) ou (E_0) l'équation :*

$$ar^2 + br + c = 0,$$

d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

2 b) Résolution des équations homogènes

Dans cette section on considère une équation différentielle (E_0) linéaire du second ordre homogène :

$$(E_0)\ :\ ay'' + by' + cy = 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On note $\mathscr{S}_{0,\mathbb{C}}$ (resp. $\mathscr{S}_{0,\mathbb{R}}$) l'ensemble des fonctions solutions de (E_0) à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$). L'équation caractéristique associée à (E_0) est :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Il nous faut distinguer deux cas, suivant que l'on cherche l'ensemble des solutions à valeurs complexes ou réelles.

Théorème 2.2 (*Résolution des équations homogènes dans* $\mathbb{C}$)

i) Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\mathscr{S}_{0,\mathbb{C}} = \left\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \ \middle|\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

ii) Si l'équation caractéristique possède une racine double r, alors :

$$\mathscr{S}_{0,\mathbb{C}} = \left\{ x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{r x} \ \middle|\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Démonstration :

On considère l'équation caractéristique d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(e)\ z^2 + bz + c = 0$$

et son discriminant $\Delta = b^2 - 4c$. Notons r_1, r_2 les deux racines de l'équation (e) (éventuellement $r_1 = r_2$).

Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$ solution de (E_0). On pose

$$z : t \mapsto y(t)e^{-r_1 t}.$$

La fonction z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en calculant

$$0 = y''(t) + by'(t) + cy(t) = (z''(t) + (r_1 - r_2)z'(t))\, e^{r_1 t}$$

c'est-à-dire

$$z''(t) + (r_1 - r_2)z'(t) = 0.$$

Par suite, z' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

Premier cas : $r_1 \neq r_2$ $(\Delta \neq 0)$

Il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = Ce^{(r_2 - r_1)t}$ donc il existe une constante D tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z(t) = \frac{C}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)t} + D$$

qui donne, en posant $C_1 = \frac{C}{r_1 - r_2}$ et $C_2 = D$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y : t \mapsto C_1\, e^{r_1\, t} + C_2\, e^{r_2\, t}.$$

Second cas : $r_1 = r_2$ $(\Delta = 0)$

De la même façon, il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z(t) = C_1 + C_2 t$$

qui donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y : t \mapsto (C_1 + C_2\, t)\, e^{r_1\, t}.$$

Réciproquement, dans les deux cas, les fonctions trouvées sont solutions de (E_0) selon les cas.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation (E_H) est donné selon les cas :

1. si $\Delta \neq 0$,
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto C_1\, e^{r_1\, t} + C_2\, e^{r_2\, t} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\}$$
où r_1 et r_2 sont les deux racines distinctes de (e) ;
2. si $\Delta = 0$,
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto (C_1 + C_2\, t)\, e^{r_1\, t} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C} \right\}$$
où r_1 est l'unique racine double de (e). ■

Remarque 2.3

On dira aussi que $y : x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ (resp. $y : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}$) est la solution générale de l'équation différentielle.

La notion de fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ ne sera pas souvent utilisée dans ce cours, si bien qu'en pratique (et en physique) on utilise le plus souvent le résultat suivant, dans lequel on ne s'intéresse qu'aux solutions à valeurs réelles des équations à coefficients réels.

Théorème 2.4 (*Résolution des équations homogènes dans* $\mathbb{R}$)

On suppose que a, b, c sont réels.

i) Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\mathscr{S}_{0,\mathbb{R}} = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

ii) Si l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors :

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{0,\mathbb{R}} &= \left\{ y : x \mapsto (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \\ &= \left\{ y : x \mapsto K \cos(\beta x + \varphi) e^{\alpha x} \;\middle|\; (K, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.\end{aligned}$$

iii) Si l'équation caractéristique possède une racine double r, alors :

$$\mathscr{S}_{0,\mathbb{R}} = \left\{ y : x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{r x} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Remarque 2.5
Lorsque l'on vous demandera de résoudre une équation différentielle, il s'agira en général de déterminer ses solutions à valeurs réelles.

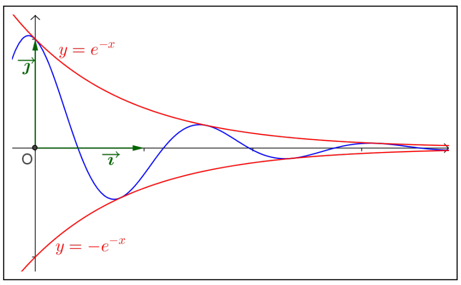
Exemple 2.6
Résoudre les équations différentielles $y'' + y' - 2y = 0$ et $y'' + y' + y = 0$.

2 c) Interprétation physique

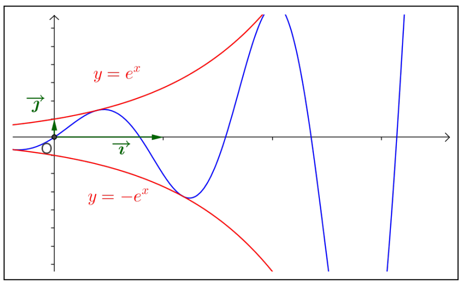
On considère une équation différentielle homogène d'ordre deux à coefficients réels de la forme $ay'' + by' + cy = 0$, et on appelle Δ le discriminant de son équation caractéristique. On s'intéresse aux solutions de cette équation définies sur $\mathbb{R}_+$, et on considère qu'elles décrivent l'évolution au cours du temps d'un système physique.

Suivant la valeur de Δ on distingue trois types de solutions, chacune possédant un comportement différent. Nous pouvons esquisser grossièrement ces comportements, chacun correspondant à un régime transitoire bien précis (rappelons que la solution générale de l'équation homogène correspond au régime transitoire).

i) Si $\Delta < 0$, on parle de régime pseudo-périodique. Dans ce cas, la courbe a l'allure d'une inusoïde amortie ou au contraire en expansion. Dans le premier cas le régime transitoire semble s'effacer au profit d'un régime établi, alors que dans le second cas il décrit une explosion qui ne mène à aucun régime permanent.

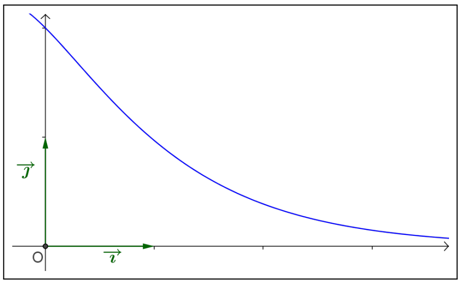


Graphe de $x \mapsto e^{-x} \cos(4x)$

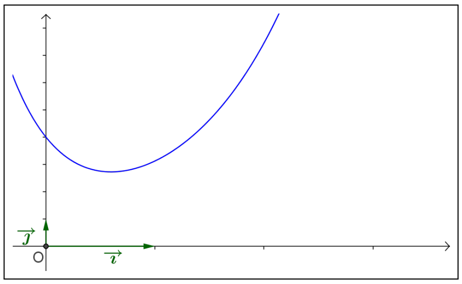


Graphe de $x \mapsto e^{x} \sin(4x)$

ii) Si $\Delta > 0$, on parle de régime apériodique. Ce cas correspond à une situation où le régime transitoire disparaît trop rapidement pour que l'on observe des oscillations.

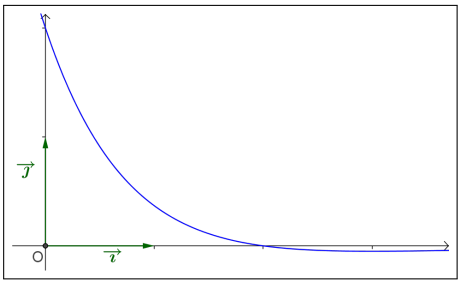


Graphe de $x \mapsto -e^{-2x} + 3e^{-x}$

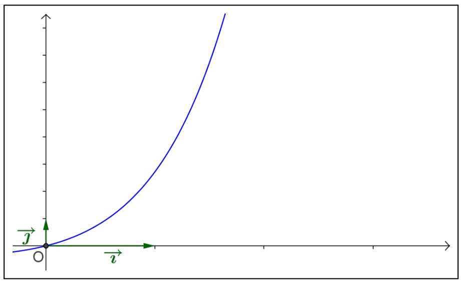


Graphe de $x \mapsto e^{x} + 3e^{-2x}$

iii) Si $\Delta = 0$, parle de régime critique. Ce cas est analogue au précédent. La seule différence réside dans la vitesse de divergence ou de convergence (et donc dans la durée du régime transitoire).



Graphe de $x \mapsto (-x+2)e^{-x}$



Graphe de $x \mapsto xe^{x}$

2 d) Cas général

Dans cette partie on considère une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$(E) \ : \ ay'' + by' + cy = f(x),$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E) :

$$(E_0) \ : \ ay'' + by' + cy = 0.$$

Le résultat suivant indique que pour trouver toutes les solutions d'une équation différentielle linéaire, il suffit d'en déterminer une seule solution particulière ainsi que toutes les solutions de l'équation homogène associée.

Théorème 2.7 (*Résolution des équations non homogènes*)

Soit y_0 une solution particulière de (E). Alors toute solution y de (E) s'écrit :

$$y = y_0 + y_h,$$

où y_h est une solution de (E_0).

Méthode 2.8

Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, il suffit de :

i) déterminer la solution générale de l'équation homogène associée ;

ii) déterminer une solution particulière de l'équation ;

iii) faire la somme des deux pour obtenir la solution générale de l'équation.

2 e) Recherche d'une solution particulière

Définition 2.9

On appelle **fonction polynomiale** *à coefficients complexes, toute fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

où n est un entier et $a_0, \ldots, a_n$ sont des complexes. Le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$, s'il existe, est appelé le **degré** *de P.*

Le résultat suivant sera démontré plus tard dans l'année.

Théorème 2.10 (*Unicité des coefficients d'un polynôme*)

Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients.

Définition 2.11

Soit T une fonction polynomiale de degré inférieur à deux et $r \in \mathbb{C}$. On appelle **multiplicité** *de r en tant que racine de T le nombre entier $m(r)$ défini par :*

i) $m(r) = 0$ *si r n'est pas racine de T ;*

ii) $m(r) = 1$ *si r est racine simple de T ;*

iii) $m(r) = 2$ *si r est racine double de T.*

On admet enfin le résultat suivant, qui permet de traiter certains cas physique.

Théorème 2.12

Soient a, b, c, α des complexes, et P un polynôme. L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = e^{\alpha x} P(x)$ admet une solution particulière de la forme :

$$y_1 : x \mapsto e^{\alpha x} x^{m(\alpha)} Q(x),$$

où Q est une fonction polynomiale de même degré que P, et où $m(\alpha)$ est la multiplicité de α en tant que racine de l'équation caractéristique.

Exemples 2.13

Déterminer des solutions particulières des équations différentielles :

i) $y'' - 3y' + 2y = x^2$;

ii) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$;

iii) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$;

iv) $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^{-x}$;

v) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}$.

Remarque 2.14

Ce résultat peut également être utilisé dans le cas des équations du premier ordre : il suffit en effet de prendre $a = 0$.

2 f) Principe de superposition

Citons le résultat suivant, qui permet de déterminer une solution particulière dans un plus grand nombre de cas.

Théorème 2.15

Soient deux fonctions f_1, f_2 définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ainsi que des complexes a, b, c. Si y_1 (resp. y_2) est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f_1$ (resp. $ay'' + by' + cy = f_2$), alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f_1 + f_2$.

Exemple 2.16

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^x + x^2 + x$. On écrira précisément l'ensemble des solutions.

Théorème 2.17

Soit a, b, c, ω des réels. Les équations différentielles du second ordre $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = \cos(\omega x)$ et $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \sin(\omega x)$ admettent une solution particulière de la forme :

i) $x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$, avec λ, μ des complexes, si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique ;

ii) $x \mapsto x(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$, avec λ, μ des complexes, si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique.

2 g) Unicité de la solution à conditions initiales fixées

Revenons au cas général (E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Nous avons vu comment déterminer toutes les solutions de (E) sur I. Le théorème suivant montre que si on impose une condition initiale, alors (E) admet une unique solution.

Théorème 2.18

Soit $x_0 \in I$ et $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$. Alors l'équation (E) possède une unique solution y sur I qui vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = v_0$.

Démonstration :

On raisonne de la même manière que pour le théorème 1.9. ■

Exemple 2.19

Déterminer l'unique solution y de $y'' - 2y' + y = e^x + x^2 + x$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

2 h) Régime libre, régime forcé

Lorsque l'on applique à un circuit RC une tension sinusoïdale de pulsation ω (c'est-à-dire que la tension délivrée par le générateur est donnée par $u(t) = A\cos(\omega t)$), on peut démontrer que la tension u_c aux bornes du condensateur vérifie une équation différentielle de la forme $\alpha u_c' + \beta u_c = A\cos(\omega t)$. Dans cette situation, le théorème 2.17 indique que la solution particulière (correspondant au régime permanent) contiendra les quantités $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$. On en déduit que la réponse d'un système régi par une équation différentielle à une excitation sinusoïdale est sinusoïdale, de même pulsation que l'excitation. C'est là un résultat qui sera fréquemment utilisé en physique. Dans une telle situation, le régime permanent est souvent appelé régime forcé. Par opposition, on appelle régime libre le régime obtenu lorsque l'excitation est interrompue (dans notre exemple, c'est le cas lorsque l'on coupe le générateur).