Chapitre A3 : Nombres complexes

Les nombres complexes furent introduits par Cardan, au XIV$^{\text{ième}}$ siècle afin de résoudre certaines équations du troisième degré. Ils ont progressivement atteint une grande importance, que ce soit en physique (électricité, électromagnétisme), en géométrie, en analyse et enfin en algèbre (notamment en arithmétique).

1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1.1

i) *Un nombre complexe z est la donnée d'un couple (x, y) de nombres réels qu'on note $z = x+iy$ où i est le couple $(0, 1)$.*

ii) *Les réels x et y sont appelés respectivement la* ***partie réelle*** *et la* ***partie imaginaire*** *de z. On note : $x = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)$ et $y = \mathcal{I}\mathrm{m}(z)$.*

iii) *Lorsque $z, z' \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence :*

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathcal{R}\mathrm{e}(z) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z') \\ \mathcal{I}\mathrm{m}(z) = \mathcal{I}\mathrm{m}(z') \end{cases}$$

iv) *L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.*

Remarque 1.2
Attention : en physique le nombre complexe i est noté j pour ne pas le confondre avec une intensité.

Définition 1.3

Soit $z \in \mathbb{C}$.

i) *z est dit* ***réel*** *si sa partie imaginaire est nulle.*

ii) *z est dit* ***imaginaire pur*** *si sa partie réelle est nulle.*

Un nombre réel x s'identifie naturellement avec le nombre complexe $x + 0i$: on pose donc $x + 0i = x$. De cette identification résulte la relation $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, où la définition du symbole $\subset$ est rappelée ci-dessous.

Notation 1.4
Soit A, B deux ensembles. Si tout élément de A appartient à B, alors on dit que A est **inclus** dans B ce qui est noté $A \subset B$.

De même, les nombres complexes imaginaires purs sont de la forme $z = iy$, avec $y \in \mathbb{R}$. On notera $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs. On peut maintenant définir une addition et une multiplication entre nombres complexes de telle sorte que $i^2 = -1$ et que les règles de calculs sur les nombres réels soient encore valables sur les nombres complexes.

Définition 1.5

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. L'addition et la multiplication des nombres complexes sont définies par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \\ zz' &= (x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{aligned}$$

Bien entendu, on ne cherchera pas à retenir les formules ci-dessus. En se rappelant simplement de la relation $i^2 = -1$, on peut retrouver les formules ci-dessus en utilisant les règles de distributivité ($x(y+z) = xy + xz$) et commutativité ($x + y = y + x$) valables pour les nombres réels.

Remarque 1.6
Attention, il n'existe aucune relation d'ordre sur l'ensemble des nombres complexes qui étende la relation d'ordre sur les nombres réels et qui soit compatible avec l'addition : on n'écrira donc jamais d'inégalités avec des nombres complexes : $z \leqslant z'$, $z \geqslant 0$ ou bien $i \leqslant 2i$ n'a aucun sens si z et z' sont des nombres complexes.

Exemple 1.7
Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + \omega^2 = 0$.

2 Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan

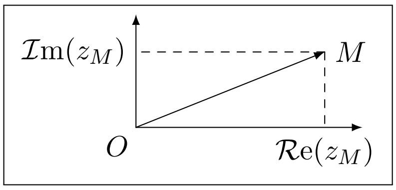
Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On note $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{P}$.

Définition 2.1

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

i) ***L'affixe** du vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) est le nombre complexe $z_{\overrightarrow{u}} = x + iy$.*

ii) ***L'affixe** du point M de coordonnées (x, y) est le nombre complexe $z_M = x + iy$.*



Remarque 2.2

i) Comme le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées (x, y), on a l'égalité $z_M = z_{\overrightarrow{OM}}$.

ii) Les coordonnées d'un point ou d'un vecteur dépendent du repère $\mathcal{R}$ considéré, et les affixes aussi.

Remarque 2.3

i) La définition précédente permet de définir les applications :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M & \longmapsto & z_M \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathscr{P}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & z_{\overrightarrow{u}} \end{array} \right. .$$

ii) L'application f est bijective, cela signifie que pour tout nombre complexe z, il existe un unique point M tel que $f(M) = z$, c'est-à-dire tel que $z_M = z$.

iii) De même, l'application g est bijective, cela signifie que pour tout nombre complexe z, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $g(\overrightarrow{u}) = z$, c'est-à-dire tel que $z_{\overrightarrow{u}} = z$.

Proposition 2.4

Soit M un point du plan.

i) L'affixe de M est réel si et seulement si M est sur l'axe des abscisses. Ainsi, on dit que l'axe des abscisses est l'axe réel.

ii) L'affixe de M est imaginaire pur si et seulement si M est sur l'axe des ordonnées. Ainsi, on dit que l'axe des ordonnées est l'axe imaginaire pur.

Proposition 2.5

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, A et B deux points du plan et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

i) $z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$, *ou en d'autres termes : l'affixe d'une somme de vecteurs est la somme des affixes des vecteurs ;*

ii) $z_{\lambda\overrightarrow{u}} = \lambda z_{\overrightarrow{u}}$;

iii) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$;

iv) le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

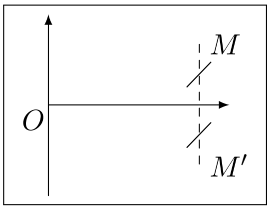
3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3.1

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** *de z le nombre complexe noté $\overline{z}$, défini par : $\overline{z} = x - iy$.*

Proposition 3.2 (*Interprétation géométrique du conjugué*)

Soit z un nombre complexe et M le point du plan d'affixe z.
Le point M', image du point M par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel a pour affixe $\overline{z}$.



Proposition 3.3

Soit z et z' deux nombres complexes. On a :

i) $\overline{\overline{z}} = z$ *ii)* $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *iii)* $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

Si de plus, $z \neq 0$, alors :

iv) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ *v)* $\forall n \in \mathbb{Z},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$ *vi)* $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Proposition 3.4

Soit z un nombre complexe. On a :

i) $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

ii) $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

iii) $z \in \mathbb{R}$ *si, et seulement si,* $\overline{z} = z$

iv) $z \in i\mathbb{R}$ *si, et seulement si,* $\overline{z} = -z$

4 Module d'un nombre complexe

Définition 4.1

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle module de z le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Remarque 4.2
Si x est un nombre réel, alors le calcul du module de x donne :

$$|x| = |x+0i| = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Cela prouve que le module de x est égal à la valeur absolue de x lorsque x est un nombre réel. C'est pour cette raison que les fonctions module et valeur absolue possèdent la même notation.

Proposition 4.3 (*Interprétation géométrique du module*)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan et A et B deux points du plan.

i) $\|\overrightarrow{u}\| = |z_{\overrightarrow{u}}|$;
ii) $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A|$;
iii) $OA = |z_A|$.

Proposition 4.4

Soit Ω un point du plan d'affixe ω, M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Le point M appartient au cercle de centre Ω et de rayon r si et seulement si $|z - \omega| = r$.

Remarque 4.5
De même, M appartient au disque fermé de centre Ω et de rayon r si et seulement si $|z-\omega| \leqslant r$ et M appartient au disque ouvert de centre Ω et de rayon r si et seulement si $|z - \omega| < r$.

Proposition 4.6

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

i) $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$;
ii) $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$.

Exemple 4.7
Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $Z = \dfrac{1+i}{2-3i}$.

Proposition 4.8

Soit z, z' deux nombres complexes. On a :

i) $|\mathcal{R}\mathrm{e}\, z| \leqslant |z|$ *et* $|\mathcal{I}\mathrm{m}\, z| \leqslant |z|$
ii) $|\overline{z}| = |z|$
iii) $|zz'| = |z|\,|z'|$

Si de plus, $z \neq 0$, alors :

iv) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
v) $\forall n \in \mathbb{Z},\ |z^n| = |z|^n$
vi) $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Théorème 4.9

Soit z, z' deux nombres complexes. On a :

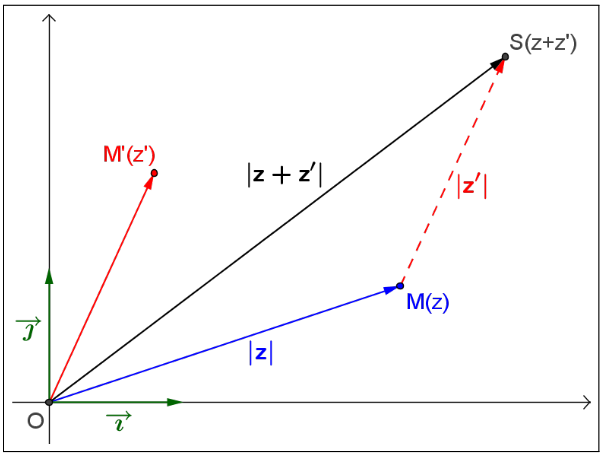
i) *Inégalité triangulaire :* $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
ii) *Cas d'égalité :* $|z+z'| = |z| + |z'|$ *si, et seulement si,* $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z' = \lambda z$ *ou* $z = \lambda z'$.
iii) $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Remarques 4.10

i) Le résultat ci-dessus est aussi fréquemment utile dans le cas où z, z' sont réels.

ii) Soit M, M', S les points du plan d'affixe respective z, z', $z+z'$. La proposition 2.5 assure que l'on a $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. L'inégalité triangulaire exprime alors que le plus court trajet entre deux points du plan est la ligne droite les reliant, car :

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'| \iff OS \leqslant OM + OM'.$$



5 Exponentielle imaginaire

Définition 5.1

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Proposition 5.2

Soit θ et θ' deux réels, et $z \in \mathbb{C}$. On a :

i) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;

ii) $\left|e^{i\theta}\right| = 1$;

iii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$;

iv) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;

v) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \, [2\pi]$;

vi) $|z| = 1 \iff \exists\theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$.

La propriété *i)* justifie la notation à l'aide de la fonction exponentielle : on a étendu les propriété de la fonction exponentielle à valeurs réelles à une fonction exponentielle prenant des valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque 5.3

Des points *ii)* et *v)* on déduit que si z est un complexe de module 1, alors $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Proposition 5.4 (*Formules d'Euler*)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple 5.5

Retrouver, pour $a, b \in \mathbb{R}$, la formule de factorisation de $\cos a + \cos b$ ainsi que la formule de développement de $\cos(a+b)$ à l'aide de l'exponentielle imaginaire.

Proposition 5.6 (*Formule de De Moivre*)

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Exemple 5.7
Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

6 Linéarisation et développement d'une formule trigonométrique

6 a) Formule du binôme de Newton et somme géométrique

Proposition 6.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

Exemple 6.2

Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, une formule simple donnant $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Définition 6.3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $n!$ par $0! = 1$ et, pour $n \geq 1$, par $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Exemple 6.4

1. Simplifier les expressions, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n!}{(n+1)!}, \quad \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)!}{n+1}(n-1) \times n!.$$

2. Écrire à l'aide de factorielles, pour $n \in \mathbb{N}$, $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ et $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$.

Définition 6.5

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$. On définit le ***coefficient binomial*** *par*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Proposition 6.6

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$. On a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Théorème 6.7 (*Formule de Pascal*)

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$. On a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Exemple 6.8
Écrire tous les coefficients binomiaux de $n = 0$ à $n = 5$ (avec la notation précédente).

La formule suivante sera démontrée dans un chapitre ultérieur.

Théorème 6.9 (*Formule du binôme de Newton*)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Exemple 6.10
Développer, pour $a, b \in \mathbb{C}$, $(a+b)^5$ et $(a-b)^3$.

6 b) Linéarisation et développement

Les formules d'Euler et de De Moivre ainsi que la formule du binôme de Newton vont nous permettre de transformer rapidement des expression trigonométriques. En particulier, on les utilisera pour :

i) linéariser une expression trigonométrique (c'est à dire transformer des produits de sinus et cosinus en somme de sinus et consinus) ;

ii) exprimer $\sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$.

Méthode 6.11 (Linéarisation d'une expression trigonométrique)
Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On cherche à linéariser l'expression $\cos^p x \sin^q x$.

i) On commence par utiliser les formules d'Euler :

$$\cos^p x \sin^q x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^q.$$

ii) On développe ensuite les expressions $\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^p$ et $\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^q$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, puis on développe le produit de deux facteurs ainsi obtenu.

iii) Enfin, il suffit de remarquer que la somme obtenue fait apparaître des couples de termes conjugués : on peut alors employer à nouveau la formule d'Euler mais dans l'autre sens pour ne faire apparaitre que des cosinus et des sinus.

Exemple 6.12
Linéariser, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos^4 x$.

Méthode 6.13 (Calcul des lignes trigonométriques des multiples d'un angle)
La formule de De Moivre permet, étant donné un nombre réel θ et un entier n, d'exprimer $\sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Il suffit pour cela de considérer l'égalité :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n,$$

puis de développer à l'aide du binôme de Newton le second membre, ce qui donne :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta\, (i\sin\theta)^k$$

et enfin d'identifier les parties réelles et imaginaires apparaissant de part et d'autre de cette égalité.

Exemple 6.14
Exprimer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

7 L'ensemble des nombres complexes de module 1

Définition 7.1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique ce qui s'écrit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Proposition 7.2

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R}\right\}$ c'est-à-dire l'équivalence : $z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$.

Remarque 7.3
On a directement les résultats suivants, avec des techniques analogues aux résultats précédents :

i) $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C}^* \;\middle|\; \overline{z} = \dfrac{1}{z}\right\}$, $\mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{U} \cap i\mathbb{R} = \{-i, i\}$;

ii) $\mathbb{U}$ est stable par multiplication : $\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2,\ zz' \in \mathbb{U}$;

iii) $\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse : $\forall z \in \mathbb{U},\ \dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$,

iv) $\mathbb{U}$ est stable par la conjugaison complexe : $\forall z \in \mathbb{U},\ \overline{z} \in \mathbb{U}$.

8 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition et définition 8.1

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $r = |z|$. On a :

i) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$,

ii) si $z = r'e^{i\theta'}$ avec $r' > 0$ et $\theta' \in \mathbb{R}$, alors $r = r'$ et $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$.

*On dit que $z = re^{i\theta}$ est l'écriture de z **sous forme trigonométrique** et que θ est **un argument** de z. On note $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$. **L'argument principal** de z est l'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.*

Corollaire 8.2

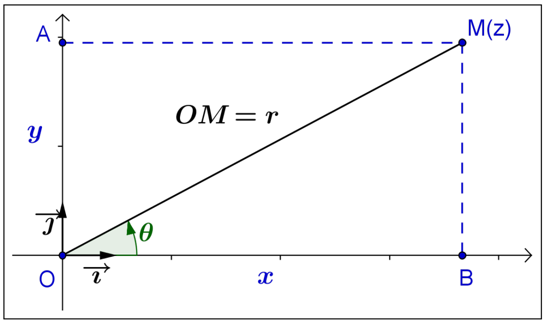
Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$. On a alors : $z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$

Proposition 8.3 (*Interprétation géométrique de l'argument*)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et M le point du plan d'affixe z. On a :

$$\arg z \equiv \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)[2\pi].$$

Soit M un point du plan. Pour repérer le point M, on peut utiliser ses coordonnées cartésiennes. Une autre façon de repérer le point M dans le plan est de considérer la distance du point M au point O et l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{OM}$. Ce sont les coordonnées polaires du point M. Soit z l'affixe du point M. Si $z = x + iy = re^{i\theta}$, avec $x, y, r, \theta \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 0$, alors les coordonnées cartésiennes de M sont (x, y) et un couple de coordonnées polaires pour M sont (r, θ).



Exemple 8.4
Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $1 + i$ et $1 + i\sqrt{3}$.

Proposition 8.5

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$i)$ $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\,[2\pi]$ $\qquad$ $ii)$ $\arg(\overline{z}) \equiv \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\,[2\pi]$

$iii)$ $\arg(z^n) \equiv n \arg z\,[2\pi]$ $\qquad$ $iv)$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\,[2\pi]$

$v)$ $z \in \mathbb{R} \iff \arg z \equiv 0\,[\pi]$ $\qquad$ $vi)$ $z \in i\mathbb{R} \iff \arg z \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

Proposition 8.6

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan et A, B, C, D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. On a :

$i)$ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \arg z_{\overrightarrow{v}} - \arg z_{\overrightarrow{u}} \equiv \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{v}}}{z_{\overrightarrow{u}}}\right)[2\pi]$,

$ii)$ $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

Conséquence 8.7

Soit A, B, C, D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. On a :

$i)$ *Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si,* $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

$ii)$ *Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si, et seulement si,* $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

Exemple 8.8
Déterminer le module et un argument du nombre complexe $e^{i\theta} + e^{i\varphi}$ lorsque $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

9 L'exponentielle complexe

Définition 9.1

*Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'**exponentielle** de z, noté e^z, est le nombre complexe défini par :* $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Proposition 9.2

Soit z et z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{Z}$.

$$i)\ \overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad ii)\ |e^z| = e^{\mathcal{R}\mathrm{e}(z)} \qquad iii)\ \arg(e^z) \equiv \mathcal{I}\mathrm{m}(z)\,[2\pi] \qquad iv)\ e^z e^{z'} = e^{z+z'}$$
$$v)\ \frac{1}{e^z} = e^{-z} \qquad vi)\ \frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'} \qquad vii)\ (e^z)^n = e^{nz}$$

Théorème 9.3

Soit z, z' deux nombres complexes. On a alors :

$$e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2ik\pi.$$

Exemple 9.4

Résoudre l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $e^z = 1 + i$.

10 Transformations du plan

À une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on peut associer la transformation du plan T, définie comme étant l'application qui à point M d'affixe z associe le point $M' = T(M)$ d'affixe $z' = f(z)$.

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array} \right.$$

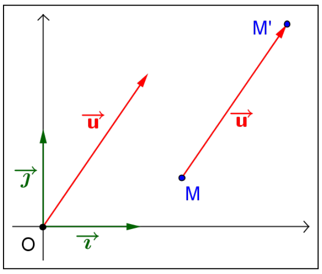
où les applications f et T sont bijectives. Dans cette section, nous allons définir quelques transformations du plan et déterminer l'application définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée qu'on notera, dans les définitions suivantes, f.

10 a) Translations

Définition 10.1

*Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. La **translation** de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation du plan qui à un point M associe l'unique point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. On note alors $M' = M + \overrightarrow{u}$ et on associe l'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + z_{\overrightarrow{u}} \end{array} \right. .$$

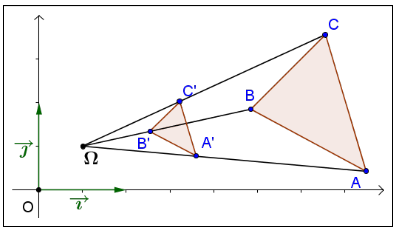


10 b) Homothéties

Définition 10.2

*Soit $k \in \mathbb{R}$ et $\Omega \in \mathscr{P}$. L'**homothétie** de centre Ω et de rapport k est la transformation du plan qui à un point M associe l'unique point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et on associe l'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & k(z - z_\Omega) + z_\Omega \end{array} \right. .$$



Remarque 10.3
Autrement dit, une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$. Si $|k| > 1$ (resp. $|k| < 1$), on parle d'aggrandissement (resp. réduction).

10 c) Rotations

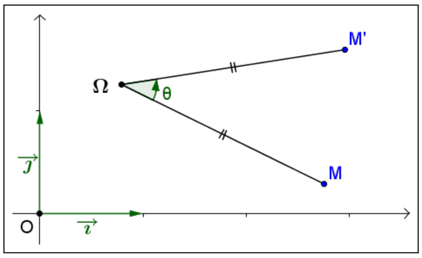
Définition 10.4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega \in \mathscr{P}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ est la transformation du plan qui fixe Ω et qui à un point $M \neq \Omega$ associe l'unique point M' tel que :

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$$

et on associe l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega \end{array} \right. .$$



10 d) Réflexions

Définition 10.5

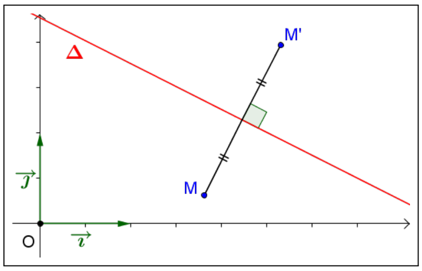
Soit Δ une droite du plan $\mathscr{P}$. La reflexion par rapport à Δ est la transformation du plan qui à un point M du plan associe le point M' tel que :

i) $M' = M$ si $M \in \Delta$.

ii) Δ est la médiatrice du segment $[MM']$ si $M \notin \Delta$.

Lorsque Δ est l'axe des abcisses, l'application associée est

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array} \right. .$$



Exemple 10.6
On considère la transformation du plan f qui a tout point $M \in \mathscr{P}$ d'affixe $z_M \in \mathbb{C}$ associe le point $f(M)$ d'affixe :

$$z_{f(M)} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_M + i + \sqrt{3}.$$

1. Montrer qu'il existe un unique point $\Omega \in \mathscr{P}$ tel que $f(\Omega) = \Omega$.
2. Comparer, pour $M \in \mathscr{P}$, les longueurs ΩM et $\Omega\, f(M)$ et déterminer l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega\, f(M)})$.
3. En déduire la nature de la transformation.