Chapitre A2 : Fonctions usuelles

Dans ce chapitre, la notation $\mathscr{P}$ désigne un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1 Fonctions

1 a) Définitions

Définition 1.1

Soit E et F des ensembles.

i) Une fonction de E dans F est une correspondance, qui à tout $x \in E$ associe ***au plus*** *un élément $y \in F$.*

ii) Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans F se note

$$f : x \mapsto f(x)$$

où $f(x)$ est une expression dépendant de x.

iii) On appelle domaine de définition d'une fonction f l'ensemble des éléments de E pour lesquels $f(x)$ est bien défini.

iv) Une application de E dans F est une correspondance, qui à tout $x \in E$ associe ***un unique*** *élément $y \in F$.*

v) E est la ***source*** *de f, appelé aussi* ***ensemble de départ****.*

vi) F est le ***but*** *de f, appelé aussi* ***ensemble d'arrivée****.*

vi) L'application f se note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.

vii) ***L'ensemble des applications*** *de E dans F est noté : $\mathscr{F}(E, F)$, ou F^E.*

Lorsqu'on considère une fonction f de E dans F, on pourra écrire $f : E \to F$. Dans ce chapitre, on ne considérera que des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2

Déterminer, parmi les applications suivantes, lesquelles sont bien définies :

1. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$;
2. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$;
3. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \right.$;
4. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \right.$.

Définition 1.3

Deux fonctions f et g sont égales lorsqu'elles ont le même domaine de définition $\mathscr{D}$ et que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) = g(x)$.

Exemple 1.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Sur quel ensemble les fonctions f et g sont-elles égales ? A-t-on $f = g$?

Définition 1.5

*Soient I et J deux ensembles de réels, et $f : I \to J$ une fonction. La **courbe représentative** de la fonction f est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, avec $x \in I$.*

Exemple 1.6

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(x-1) \end{array} \right.$.

1. Étudier rapidement la fonction f, puis tracer la courbe représentative de f.
2. En déduire, sans aucun calcul, l'allure de la courbe représentative des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} g : x \mapsto f(x) - 1; & h : x \mapsto f(x-1); \\ i : x \mapsto f(2-x); & j : x \mapsto 2 - f(x); \\ k : x \mapsto 2f(x); & l : x \mapsto f(2x). \end{array}$$

1 b) Composition

On introduit ici la notion de composition de fonctions. Cette notion sera étudiée plus en détails dans un chapitre ultérieur.

Définition 1.7

*Soient trois ensembles E, F, G et deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On note $g \circ f$ l'application **composée** de f et de g définie par :*

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array} \right.$$

Remarque 1.8

Lorsqu'on compose des fonctions, il faut faire attention aux ensembles de définition. Lorsqu'on calcule $(f \circ g)(x)$, il faut pour pouvoir appliquer la fonction f à $g(x)$, il faut donc que $g(x)$ soit dans l'ensemble de définition de f.

Exemple 1.9

On considère $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto x + 1$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des fonctions différentes.

Exemple 1.10

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$;
2. $g : x \mapsto \ln(\cos x)$;
3. $h : x \mapsto \sqrt{\ln x}$.

1 c) Bijection, fonction réciproque

Définition 1.11

Soit $f : E \to F$, $I \subset E$ et $J \subset F$.

*i) On dit que f **réalise une bijection** de I sur J lorsque tout élément y de J admet un unique antécédent x dans I c'est-à-dire :*

$$\forall y \in J,\ \exists! x \in I,\ y = f(x).$$

*ii) Lorsque $I = E$ et $J = F$, on dit aussi que f est **bijective** ou une **bijection**.*

Notation 1.12

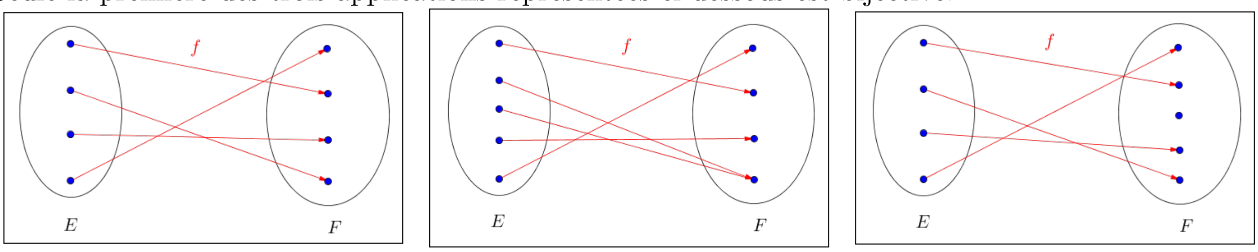
Le symbole $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

Remarque 1.13

On dira parfois, par abus de langage « f est une fonction bijective de I vers J »ou « f réalise une bijection de I vers J ». Il faudra toujours préciser ce que sont I et J.

Exemple 1.14

Seule la première des trois applications représentées ci-dessous est bijective.



Définition 1.15

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective. La fonction réciproque de f, notée f^{-1} est la fonction définie de F vers E qui à un élément y de F associe son unique antécédent x dans E par la fonction f. On a donc l'équivalence suivante :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

Exemple 1.16

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$. Peut-on trouver des intervalles I_1, I_2, I_3, I_4 tel que

1. f réalise une bijection de I_1 vers $\mathbb{R}_+$;
2. f réalise une bijection de I_2 vers $\mathbb{R}$;
3. f réalise une bijection de $[0, 4]$ vers I_3 ;
4. f réalise une bijection de I_4 vers $[0, 2]$.

Déterminer la fonction réciproque de la bijection de I_1 vers $\mathbb{R}_+$.

Théorème 1.17

Soient I et J deux intervalles et $f : I \to J$ une fonction bijective. La courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

2 Propriétés des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

2 a) Intervalles

Définition 2.1

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie I de $\mathbb{R}$ d'une des formes suivantes

1) $\mathbb{R}$	2) $[a,+\infty[$	3) $]a,+\infty[$	4) $]-\infty,b]$	5) $]-\infty,b[$
6) $[a,b]$	7) $[a,b[$	8) $]a,b]$	9) $]a,b[$	10) $\varnothing$

Définition 2.2

Soit I un intervalle.

i) *I est **ouvert** s'il est du type $1, 3, 5, 9$ ou 10,*

ii) *I est **fermé** s'il est du type $1, 2, 4, 6$ ou 10,*

iii) *Un intervalle est **véritable** s'il contient au moins deux réels distincts. Il en contient alors une infinité.*

2 b) Fonctions paires, impaires, périodiques

Définition 2.3

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

i) *Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que I est centré en a lorsque : $\forall h \in \mathbb{R},\ a+h \in I \iff a-h \in I$.*

ii) *Lorsque I est centré en 0 et que : $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$, on dit que f est **paire**.*

iii) *Lorsque I est centré en 0 et que : $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$, on dit que f est **impaire**.*

Exemple 2.4

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, I une partie de $\mathbb{R}$ centrée en a, $f : I \to \mathbb{R}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Montrer que lorsque : $\forall h \in \mathbb{R},\ a+h \in I \Rightarrow f(a+h) = f(a-h)$, $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$.

Remarque 2.5

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, I une partie de $\mathbb{R}$ centrée en a, $f : I \to \mathbb{R}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. De façon générale, on a, comme dans l'exemple précédent :

i) Lorsque : $\forall h \in \mathbb{R},\ a+h \in I \Rightarrow f(a+h) = f(a-h)$, $\mathscr{C}$ est invariante par réflexion par rapport à la droite d'équation $x = a$.

ii) La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

iii) Lorsque : $\forall h \in \mathbb{R},\ a+h \in I \Rightarrow \dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$, $\mathscr{C}$ est invariante par symétrie par rapport au point $\Omega(a,b)$.

iv) La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Définition 2.6

Soit I une partie de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $T > 0$.

i) *On dit que f est **périodique de période** T lorsque $\forall x \in I,\ x+T \in I$ et $\forall x \in I,\ f(x+T) = f(x)$. Dans ce cas, on dit que T est une période de f.*

ii) *On dit que f est **périodique** lorsqu'il existe $T > 0$ tel que f soit périodique de période T.*

Exemples 2.7

i) Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.

ii) La fonction tangente est périodique de période π.

iii) Les fonctions constantes sont périodiques, mais n'ont pas de plus petite période.

Proposition 2.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ f(x+kT) = f(x).$$

Théorème 2.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T. Alors la courbe représentative de f est invariante par translation de vecteur $\overrightarrow{t} = T\overrightarrow{\imath}$.

2 c) Monotonie

Définition 2.10

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

i) *On dit que f est* ***croissante*** *lorsque $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.*

ii) *On dit que f est* ***décroissante*** *lorsque $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(y) \leqslant f(x)$.*

iii) *On dit que f est* ***monotone*** *lorsque f est croissante ou décroissante.*

iv) *On dit que f est* ***strictement croissante*** *lorsque $\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*

v) *On dit que f est* ***strictement décroissante*** *lorsque $\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$.*

vi) *On dit que f est* ***strictement monotone*** *lorsque f est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exemple 2.11

1. Montrer qu'une fonction est à la fois croissante et décroissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est constante.
2. Montrer que la composée de deux fonctions définies et croissantes sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Que dire de la composée de deux fonctions décroissantes ?

2 d) Continuité

Dans tout le reste de la partie 2, les résultats seront admis pour le moment mais seront démontrés plus tard dans l'année.

Définition 2.12

Soient $I \subset \mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$.

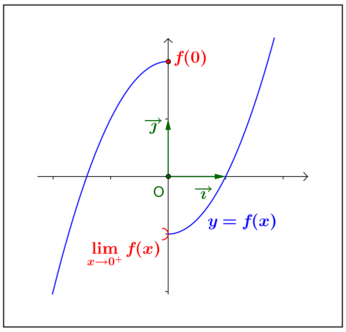
i) *Soit $a \in I$. On dit que f est* ***continue*** *en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

ii) *On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en a pour tout $a \in I$.*

Remarque 2.13

Il a été dit en Terminale que les fonctions continues sont celles dont on peut tracer le graphe sans lever le stylo. Cette notion est informelle et ne peut donc pas être utilisée dans une démonstration, mais il peut être utile de la garder à l'esprit puisqu'elle permet d'appréhender la majorité des exemples rencontrés.

Exemple 2.14
Voici un exemple de graphe d'une fonction non continue en 0.



Proposition 2.15

La somme, le produit ou la composée de deux fonctions continues est continue.

Nous allons avoir besoin de la définition suivante pour le théorème qui suit. Nous y reviendrons dans un chapitre ultérieur.

Définition 2.16

Soit f une fonction et I une partie de son ensemble de définition. ***L'image directe*** *de I par f, noté $f(I)$ est l'ensemble défini par :*

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}.$$

Théorème 2.17 (*Théorème de la bijection*)

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I vers J. De plus, $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Exemple 2.18
Justifier que $g : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un ensemble qu'on déterminera. Déterminer une expression de son application réciproque notée g^{-1}.

2 e) Dérivabilité

Définition 2.19

Soient I un intervalle véritable et $f : I \to \mathbb{R}$

i) Soit $a \in I$. On dit que f est ***dérivable*** *en a lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Cette limite est alors appelée* ***nombre dérivé*** *de f en a, noté $f'(a)$.*

ii) On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en a, pour tout $a \in I$. On appelle alors ***fonction dérivée*** *de f la fonction $f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a). \end{cases}$*

Théorème 2.20

Soient I un intervalle véritable et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(a, f(a))$. Cette tangente admet donc pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Théorème 2.21

Toute fonction dérivable en a (resp. sur un intervalle I) est continue en a (resp. sur I).

Théorème 2.22

Soient I un intervalle véritable et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

i) *f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.*

ii) *f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.*

iii) *Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.*

iv) *Si $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.*

Théorème 2.23

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle véritable I, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) *$u + v$ est dérivable sur I, et $(u + v)' = u' + v'$.*

ii) *λu est dérivable sur I, et $(\lambda u)' = \lambda u'$.*

iii) *uv est dérivable sur I, et $(uv)' = u'v + uv'$*

iv) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^n est dérivable, et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$*

v) *Si, v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables, et : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.*

Théorème 2.24

Soient I et J deux intervalles véritables, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x).$$

Exemple 2.25

Le théorème précédent permet de retrouver les formules bien connues de terminales : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $(e^u)' = u'e^u$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$,...

Théorème 2.26

Soient I et J deux intervalles véritables, et $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable en $a \in I$. Soit $b = f(a)$. Alors :

i) *Si $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.*

ii) *Si $f'(a) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en b.*

Exemple 2.27

Déterminer une expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

2 f) Primitives

Définition 2.28

Soient I un intervalle véritable et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ est une ***primitive*** *de f sur I si $F' = f$.*

Théorème 2.29

Soit I un intervalle véritable.

i) Les primitives de la fonction nulle sur I sont les fonctions constantes.

ii) Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction f sur I, alors $F_1 - F_2$ est une fonction constante sur I.

iii) Soient f une fonction continue sur I, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(a) = b$.

Exemple 2.30

Déterminer une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, non constante sur $\mathbb{R}^*$ mais dont la dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$.

2 g) Asymptotes

Soit I un intervalle véritable.

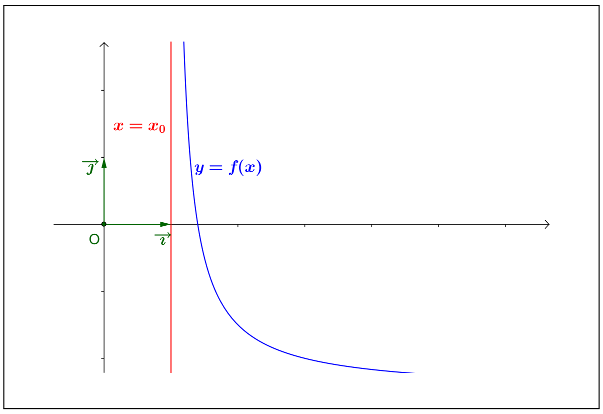
Définition 2.31

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

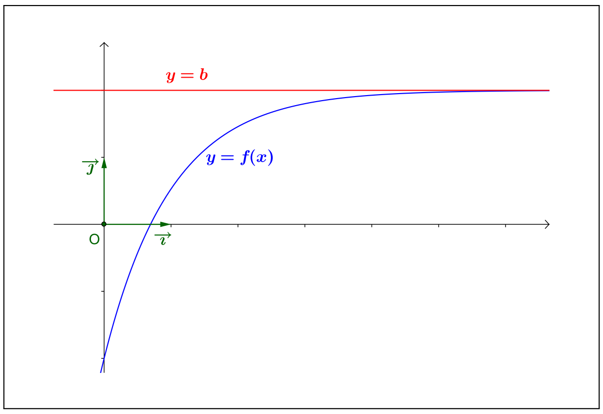
i) On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est ***asymptote verticale*** *à $\mathscr{C}_f$ si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \pm\infty$.*

ii) On dit que la droite d'équation $y = b$ est ***asymptote horizontale*** *en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à $\mathscr{C}_f$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$).*

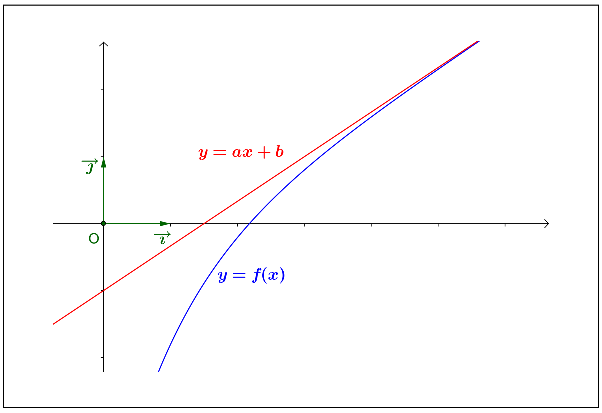
iii) On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote oblique*** *en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à $\mathscr{C}_f$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$).*



Asymptote verticale



Asymptote horizontale



Asymptote oblique

Théorème 2.32

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à $\mathscr{C}_f$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$ *(resp.* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = b$*)*

Exemple 2.33

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{2x^2 + x - 4}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$ dont on déterminera une équation.

3 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

3 a) Fonction logarithme népérien

Définition 3.1

On appelle ***logarithme népérien*** *l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction inverse qui s'annule pour $x = 1$. On la note* ln.

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0.$$

Proposition 3.2

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*0$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; *ii)* $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$;

iii) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$; *iv)* $\ln(x^n) = n \ln x$.

On devra admettre, comme nous n'avons pas défini la notion de limite que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Proposition 3.3

i) *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante,*

ii) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$,

iii) *La fonction* $\ln$ *réalise une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.

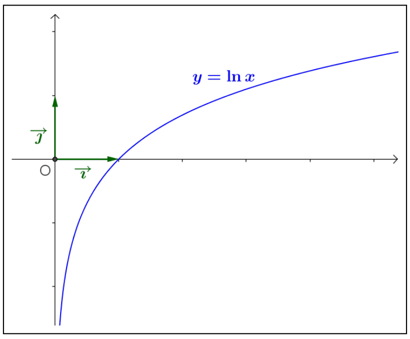
iv) $\ln x > 0$ *si, et seulement si,* $x \in]1,+\infty[$

v) $\ln x < 0$ *si, et seulement si,* $x \in]0,1[$.

vi) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

vii) *Pour tout* $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.

viii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ *et* $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$.



Définition 3.4

On appelle e *l'unique antécédent de* 1 *par la fonction* $\ln$, *c'est-à-dire que* e *est l'unique réel strictement positif vérifiant* $\ln e = 1$.

3 b) Fonction exponentielle

Définition 3.5

On appelle ***exponentielle***, *notée* $\exp$ *la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien :*

$$\exp = \ln^{-1} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[\,.$$

La proposition suivante est une conséquence immédiate de cette définition :

Proposition 3.6

On a :

i) $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R},\ \ln x = y \Leftrightarrow x = \exp y\,;$

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp x) = x\,;$

iii) $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \exp \ln x = x$.

Proposition 3.7

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$.

i) $\exp(x+y) = \exp x \times \exp y$

ii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

iii) $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

iv) $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Proposition 3.8

i) *La fonction* $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.

ii) *La fonction* $\exp$ *est strictement croissante,*

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0^+$,

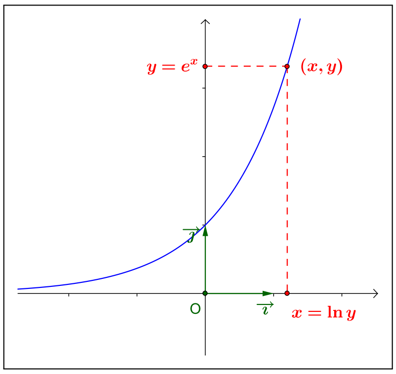
iv) $\exp(x) > 1$ *si, et seulement si,* $x > 0$

v) $\exp(x) < 1$ *si, et seulement si,* $x < 0$.

vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

vii) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 1 + x$.

viii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$.



Notation 3.9

La notation e^x n'a le sens de « e puissance x » que lorsque x est une entier naturel. C'est parce que la fonction exponentielle a des propriétés analogues aux puissances que l'on a choisi cette notation.

3 c) Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque

Soit $a \in]0, +\infty[$.

Définition 3.10

On appelle ***exponentielle de base*** a *la fonction* $\exp_a$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\exp_a(x) = e^{x\ln a}$$

Notation 3.11

Quand x est rationnel, les propriétés de la fonction exponentielle montrent que $a^x = \exp_a(x)$. On choisit ensuite de définir a^x lorsque x n'est pas rationnel comme étant $\exp_a(x)$.

Proposition 3.12

i) *Les relations de la proposition 3.7 sont valables pour la fonction* $\exp_a$.

ii) *La fonction* $\exp_a$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'_a(x) = \ln a \exp_a(x)$.

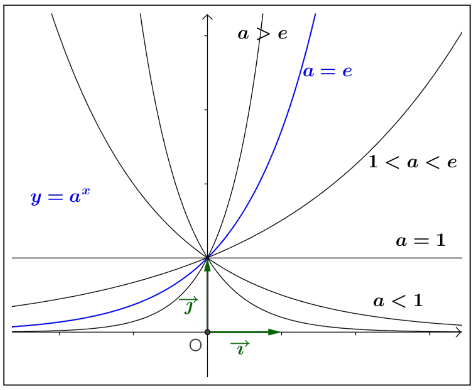
iii) *La fonction* $\exp_a$ *est strictement croissante si* $a > 1$, *strictement décroissante si* $0 < a < 1$ *et constante si* $a = 1$.

iv) *Si* $a \neq 1$, *la fonction* $\exp_a$ *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers* $]0, +\infty[$.

v) $\forall a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(a^x) = x \ln a$.

vi) $\forall a > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ (a^x)^y = a^{xy}$.

Voici quelques exemples de courbes représentatives de fonctions exponentielles de base a :



Proposition et définition 3.13

Si $a \neq 1$, *on appelle* ***logarithme de base*** a *la réciproque de la fonction exponentielle de base* a. *En particulier, le logarithme de base* 10 *est appelé logarithme décimal. On le note* log.

Proposition 3.14

i) $\forall x \in]0, +\infty[\,,\ \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

ii) *Les relations de la proposition 3.2 sont valables pour la fonction* $\log_a$.

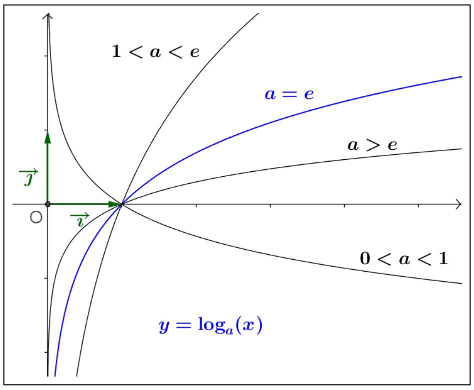
iii) *La fonction* $\log_a$ *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et* $\forall x \in]0, +\infty[\,,\ \log'_a(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

iv) *La fonction* $\log_a$ *est strictement croissante si* $a > 1$, *strictement décroissante si* $0 < a < 1$.

v) $\forall a, b \in]0, +\infty[\setminus \{1\},\ \forall x \in]0, +\infty[\,,\ \log_b(x) = \log_b(a) \times \log_a(x)$.

vi) $\forall b \in]0, +\infty[\setminus \{1\},\ \forall a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \log_b(a^x) = x \log_b(a)$.

Voici quelques exemples de courbes représentatives de fonctions logarithmes de base a :



3 d) Fonctions puissances

Dans ce paragraphe, α désigne un nombre réel quelconque.

Définition 3.15

On appelle fonction **puissance** *d'exposant α la fonction f_α définie sur $]0,+\infty[$ par :*

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,,\ f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Notation 3.16

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on notera $\sqrt[n]{x}$ la quantité $x^{\frac{1}{n}}$.

Exemples 3.17

L'intervalle $]0,+\infty[$ n'est pas toujours l'ensemble de définition de $x \mapsto x^\alpha$. Pour certaines valeurs de α, x^α a un sens pour $x = 0$ ou pour $x < 0$. Par exemple :

i) Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors f_n est la restriction à $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^n$, qui est définie sur $\mathbb{R}$.

ii) Si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$, alors f_n est la restriction à $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^n$, qui est définie sur $\mathbb{R}^*$.

iii) Si n est un entier positif pair, $f_{\frac{1}{n}}$ est la restriction à $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, qui est définie sur $[0,+\infty[$.

iv) Si n est un entier positif impair, $f_{\frac{1}{n}}$ est la restriction à $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, qui est définie sur $\mathbb{R}$.

On a les règles de calcul suivantes :

Proposition 3.18

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

i) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$; *ii)* $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$; *iii)* $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$;

iv) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$; *v)* $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$; *vi)* $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Proposition 3.19

La fonction puissance de base α est dérivable sur $]0,+\infty[$, et :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,,\ f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

De plus, si $\alpha > 0$ alors :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$.

ii) *f_α est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur lui-même.*

Si $\alpha < 0$ alors :

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$.

iv) *f_α est une bijection strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur lui-même.*

Théorème 3.20 (*Croissances comparées*)

Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$. *Alors :*

$$i)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad ii)\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha\,|\ln x|^\beta = 0$$

$$iii)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty \qquad iv)\ \lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha\, e^{\gamma x} = 0$$

4 Fonctions circulaires directes et réciproques

4 a) Fonctions circulaires directes

Lemme 4.1

les fonctions sin *et* cos *sont dérivables en* 0, *et :*

$$\sin'(0) = 1 \quad et \quad \cos'(0) = 0.$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat dans le cours.

Proposition 4.2

Les fonctions cos, sin *et* tan *sont dérivables sur leurs ensembles de définition. De plus :*

$i)$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$ii)$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$iii)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Comme les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques, il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π. De plus, comme sin est impaire et cos paire, on peut se restreindre à l'intervalle $[0, \pi]$. On a les tableaux de variation suivants :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin x$	0	$-$	0
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	$+$	0	$-$
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0

Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus découlent de ces considérations et ont été vues dans le chapitre précédent.

Exemple 4.3

Justifier la représentation graphique de la fonction tan vue dans le chapitre précédent.

4 b) Arcsinus

Théorème et définition 4.4

La fonction sinus réalise une bijection strictement croissante de $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *vers* $[-1,1]$. *La réciproque de cette bijection est appelée fonction* ***arcsinus***. *On la note* Arcsin *:*

$$\text{Arcsin} : [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Proposition 4.5

On a les propriétés :

i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in [-1,1]\,,\ \left(\sin x = y \ \text{ et } \ x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \iff x = \text{Arcsin}\, y$ *;*

ii) *La fonction arcsinus est une bijection strictement croissante impaire de* $[-1,1]$ *vers* $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *;*

iii) $\forall x \in [-1,1]\,,\ \sin \text{Arcsin}\, x = x$ *;*

iv) $\forall x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\,,\ \text{Arcsin} \sin x = x.$

Proposition 4.6

On a : $\forall x \in [-1,1]\,,\ \cos \text{Arcsin}\, x = \sqrt{1-x^2}.$

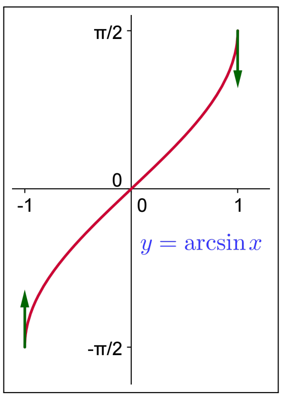
Proposition 4.7

i) *La fonction arcsinus est continue sur* $[-1,1]$,

ii) *La fonction arcsinus est dérivable sur* $]-1,1[$,

iii) $\forall x \in]-1,1[\,,\ \text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

La courbe représentative de la fonction arcsinus est la symétrique de la courbe sinus sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, par rapport à la première bissectrice.



Exemple 4.8

1. Déterminer les valeurs de Arcsin(1), Arcsin(1), Arcsin($\sqrt{2}/2$).
2. Que vaut Arcsin($\sin 3\pi/4$) ?
3. Étudier la fonction Arcsin $\circ$ sin.

4 c) Arccosinus

Les propriétés 4.9 à 4.12 se démontrent de façon tout à fait analogues aux propriétés de la fonction Arcsin.

Théorème et définition 4.9

La fonction cosinus réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ *vers* $[-1, 1]$*. La réciproque de cette bijection est appelée fonction* ***arccosinus****. On la note* Arccos *:*

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi] \,.$$

Proposition 4.10

i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in [-1, 1]\,,\ (\cos x = y \ \ \textit{et} \ \ x \in [0, \pi]) \iff x = \text{Arccos}\, y.$

ii) *La fonction arccosinus est une bijection strictement décroissante de* $[-1, 1]$ *vers* $[0, \pi]$*,*

iii) $\forall x \in [-1, 1]\,,\ \cos \text{Arccos}\, x = x,$

iv) $\forall x \in [0, \pi]\,,\ \text{Arccos} \cos x = x,$

Proposition 4.11

On a : $\forall x \in [-1, 1]\,,\ \sin \text{Arccos}\, x = \sqrt{1 - x^2}.$

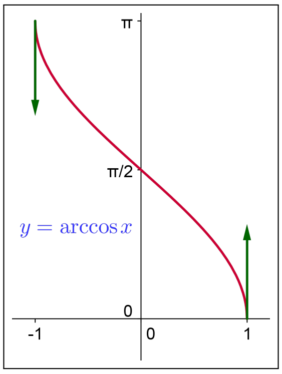
Proposition 4.12

i) *La fonction arccosinus est continue sur* $[-1, 1]$*,*

ii) *La fonction arccosinus est dérivable sur* $]-1, 1[$*,*

iii) $\forall x \in]-1, 1[\,,\ \text{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

La courbe représentative de la fonction arccosinus est la symétrique de la courbe cosinus sur l'intervalle $[0, \pi]$, par rapport à la première bissectrice.



Proposition 4.13

$\forall x \in [-1, 1]\,,\ \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}.$

4 d) Arctangente

Théorème et définition 4.14

La fonction tangente réalise une bijection strictement croissante de $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *vers* $\mathbb{R}$*. La réciproque de cette bijection est appelée fonction* ***arctangente****. On la note* Arctan *:*

$$\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Proposition 4.15

i) *La fonction arctangente est une bijection strictement croissante impaire de* $\mathbb{R}$ *vers* $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan \operatorname{Arctan} x = x$,

iii) $\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \operatorname{Arctan} \tan x = x$,

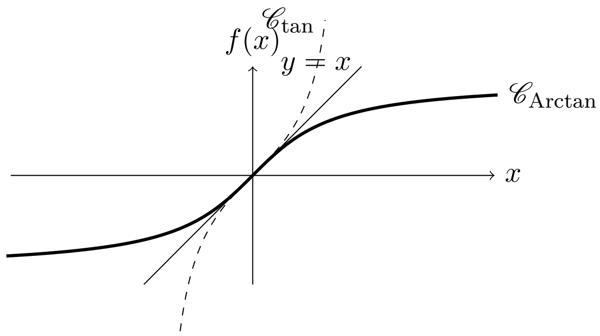
iv) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \left(\tan x = y \text{ et } x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \iff x = \operatorname{Arctan} y.$

Proposition 4.16

i) *La fonction arctangente est continue, dérivable sur* $\mathbb{R}$,

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{-\pi}{2}.$



Proposition 4.17

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

5 Fonctions hyperboliques

Théorème 5.1

Soit $I \subset \mathbb{R}$*, centré en* 0 *et* $f : I \to \mathbb{R}$*. Alors il existe une unique fonction paire* $p : I \to \mathbb{R}$ *et une unique fonction impaire* $i : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $f = p + i$*. De plus , pour tout* $x \in I$ *:*

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On dit que p *est la partie paire de* f *et que* i *est la partie impaire de* f*.*

Définition 5.2

i) *La fonction* ***cosinus hyperbolique****, noté* ch *est la partie paire de la fonction exponentielle :*

$$\mathrm{ch} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right. ,$$

ii) *La fonction* ***sinus hyperbolique****, noté* sh *est la partie impaire de la fonction exponentielle :*

$$\mathrm{sh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right. ,$$

Proposition 5.3

$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$

Proposition 5.4

Les fonctions sh *et* ch *sont continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$*, et on a :*

i) $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$,

ii) $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$,

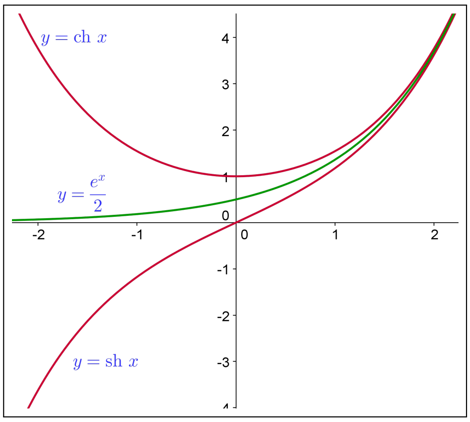
Théorème 5.5

i) *La fonction* sh *est impaire, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, $\mathrm{sh}\, 0 = 0$, *et :*

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}\, x = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}\, x = +\infty.$$

ii) *La fonction* ch *est paire, strictement décroissante sur* $]-\infty, 0]$ *et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$, $\mathrm{ch}\, 0 = 1$, *et :*

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty.$$



6 Formulaire de dérivation

Dérivées des fonctions usuelles

On considère f définie par $f(x) = ...$	alors f est définie et continue sur	dérivable sur $I = \dots$	et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dots$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Dérivées des fonctions composées usuelles

Soit u est une **fonction** dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
u^n, $n \in \mathbb{N}^*$	I	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	lorsque u ne s'annule pas	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	lorsque $u > 0$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	I	$(e^u)' = u'e^u$
$\ln u$	lorsque $u > 0$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$\cos u$	I	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$\sin u$	I	$(\sin u)' = u' \cos u$