Chapitre A1 : Trigonométrie

Dans ce chapitre, nous allons, après quelques rappels sur les nombres réels, définir, géométriquement, les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente. Dans un second temps, nous démontrerons un certain nombre de formules, dites trigonométriques, qu'il faudra connaître par cœur, ou au moins être capable de retrouver très rapidement. Toutes ces formules mathématiques seront utilisées dans bon nombre de chapitres de physique et de SI.

Nous nous baserons principalement sur des notions déjà connues lors des années antérieures : les opérations sur les nombres réels et la notion de vecteur du plan (celle-ci est construite beaucoup plus tard dans l'année), les opérations sur ceux-ci et la notion d'angle orienté, la notion de droite du plan.

1 Rappels sur les nombres réels

1 a) Inégalités dans $\mathbb{R}$

Les propriétés des nombres réels mentionnées dans cette section découlent de la construction des nombres réels et nous devrons les admettre.

Proposition 1.1

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$x\,y = 0 \text{ si et seulement si } x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Remarque 1.2
Le « ou » mathématique est inclusif, x et y peuvent être nuls simultanément.

Exemple 1.3
Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x^2 = 4$.

Proposition 1.4

Soit $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

(i) Si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$.

(ii) Si $x \leq y$ et $z \leq t$ alors $x + z \leq y + t$.

(iii) Si $\mathbf{0} \leq \mathbf{z}$ et $x \leq y$ alors $x\,z \leq y\,z$;

(iv) Si $0 \leq z \leq t$ et $0 \leq x \leq y$, alors $x\,z \leq y\,t$.

Exemple 1.5

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $2xy \leqslant x^2 + y^2$. Dans quel cas cette inégalité est une égalité ?
2. En considérant les propriétés de la fonction ln de l'année dernière, montrer que pour tout réel x positif on a $\ln(1 + x) \leqslant x$.

1 b) Valeur absolue

Définition 1.6

*Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x, notée $|x|$, le réel donné par*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Proposition 1.7

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $|x| \geq 0$ *et* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $|x| = \max(x, -x)$;

(iii) $\sqrt{x^2} = |x|$;

(iv) $|xy| = |x||y|$;

(v) *pour* $y \neq 0$, $|x/y| = |x|/|y|$.

Exemple 1.8

Écrire plus simplement, avec les intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leqslant 2\}.$$

Remarque 1.9

Au cours des exemples précédents, nous avons écrit les ensembles de plusieurs façons :

1. avec une notation comme par exemple $\mathbb{R}$ ou l'intervalle $[-1, 3]$;
2. avec une écriture en **extension**, c'est-à-dire en énumérant les éléments de l'ensemble sous la forme $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ comme par exemple $\{-2, 2\}$;
3. avec écriture **descriptive** sous la forme $\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$ où E est un ensemble et $\mathcal{P}$ une propriété comme par exemple : $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leqslant 2\}$.

Nous reverrons ces notions plus tard dans l'année.

2 Rappels géométriques

Dans toute la suite, on considère $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

2 a) Relation de congruence, mesure d'un angle

Définition 2.1

*Soient $a, x, y \in \mathbb{R}$. On dit que x et y sont **congrus** modulo a lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + ka$. On note alors :*

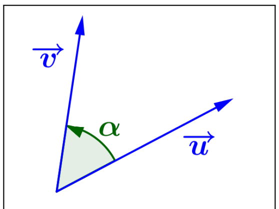
$$x \equiv y\,[a].$$

Notation 2.2

Le symbole $\exists$ signifie « il existe » . Ainsi, la définition précédente se traduit par l'équivalence suivante :

$$x \equiv y\,[a] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + ka.$$

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Si α est une mesure de l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors $\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ est une autre mesure de ce même angle.
Réciproquement, toute mesure de cet angle est congru à α modulo 2π.
On notera $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une mesure quelconque de l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Cette mesure est donc définie modulo 2π.



$\boldsymbol{\alpha \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,[2\pi]}$

Remarque 2.3

Lorsqu'on utilise des angles orientés, il ne faut pas oublier la congruence modulo 2π.

Proposition 2.4

Soient $x, x', y, y', z, \lambda, a \in \mathbb{R}$.

(i) Si $x \equiv y\ [a]$ et $y \equiv z\ [a]$, alors $x \equiv z\ [a]$.

(ii) Si $x \equiv x'\ [a]$ et $y \equiv y'\ [a]$, alors $x + y \equiv x' + y'\ [a]$.

(iii) Si $x \equiv x'\ [a]$, alors $\lambda x \equiv \lambda x'\ [\lambda a]$.

Si $x, x', y, y', a \in \mathbb{Z}$, alors :

(iv) Si $x \equiv x'\ [a]$ et $y \equiv y'\ [a]$, alors $xy \equiv x'y'\ [a]$.

Remarque 2.5

Il existe d'autres propriétés des congruences qui se démontrent de façon analogues, par exemple, avec les hypothèses précédentes, si $n \in \mathbb{Z}$ et $x \equiv x'\ [na]$, alors $x \equiv x'\ [a]$.

2 b) Mesure algébrique

Définition 2.6

Un axe est une droite orientée par un vecteur directeur de norme 1. Si A et B sont deux points d'un axe orienté Δ par un vecteur $\overrightarrow{u}$, alors la mesure algébrique de AB est le nombre réel $\overline{AB}$ tel que :

$$\overline{AB} = \begin{cases} AB & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ a le même sens que } \overrightarrow{u} \\ -AB & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ n'a pas le même sens que } \overrightarrow{u} \end{cases}$$

Ainsi, comme le vecteur $\overrightarrow{u}$ est unitaire (c'est-à-dire que sa norme est égale à 1), on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\ \overrightarrow{u}.$$

Exemple 2.7

1. Par quels vecteurs sont orientés les axes des abscisses et des ordonnées ?
2. On considère un axe Δ dirigé par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et A, B, C trois points de Δ tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{u}$, déterminer les valeurs de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{CA}$.

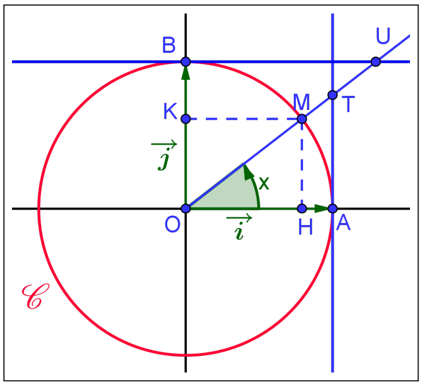
3 Le cercle trigonométrique

Définition 3.1

(i) Le cercle trigonométrique est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

(ii) Pour tout $M \in \mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}\right) \equiv x\ [2\pi]$, les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$ sont appelés ***cosinus*** et ***sinus*** *de x. On les note $\cos x$ et $\sin x$. Sur le dessin ci-contre, on a donc :*

$$\overline{OH} = \cos x \quad \text{et} \quad \overline{OK} = \sin x$$



Théorème 3.2

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors l'équivalence suivante :

$$x^2 + y^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos\theta = x \\ \sin\theta = y \end{cases}$$

Exemple 3.3

Montrer géométriquement que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Proposition 3.4

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

(i) $\cos x = 0 \iff x \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$;

(ii) $\sin x = 0 \iff x \equiv 0\,[\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$.

Définition 3.5

*(i) Si $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$, la **tangente** de x est le nombre réel, noté $\tan x$, défini par :*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \overline{AT}.$$

*(ii) Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, la **cotangente** de x est le nombre réel, noté $\operatorname{cotan} x$, défini par :*

$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \overline{BU}.$$

En procédant géométriquement comme dans l'exemple précédent, on obtient le tableau des valeurs particulières suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Exemple 3.6

Soit $\alpha \in [0, \pi]$. À l'aide d'un dessin, justifier la formule :

$$\cos x \leqslant \cos\alpha \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in [\alpha + 2k\pi, 2\pi - \alpha + 2k\pi].$$

Proposition 3.7

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

(i) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

(ii) $|\cos x| \leqslant 1$ *et* $|\sin x| \leqslant 1$;

(iii) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ *et* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$;

(iv) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ *et* $\sin(x + \pi) = -\sin x$;

(v) $\cos(-x) = \cos x$ *et* $\sin(-x) = -\sin x$;

(vi) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Exemple 3.8
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant le cercle trigonométrique, exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Démontrer ces relations à l'aide de la proposition 3.7.

Proposition 3.9

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. On a :

(i) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

(ii) $\tan(-x) = -\tan x$;

(iii) $\tan(x + \pi) = \tan x$.

4 Formules d'addition

Proposition 4.1 (*Formules d'addition*)

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

(i) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$;

(ii) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$;

(iii) $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$;

(iv) $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

De plus, pour toutes les valeurs de x et y pour lesquelles les deux membres sont définis, on a les égalités suivantes :

(v) $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$;

(vi) $\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$.

À partir des formules d'addition, nous allons démontrer un certain nombre de formules de trigonométrie, à commencer par les formules de duplication.

Proposition 4.2 (*Formules de duplication*)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$,

(ii) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]$ et $x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, alors :

(iii) $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

Exemple 4.3

En effectuant une transformation, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 + \sin x - \cos x = 0.$$

Remarque 4.4

De façon générale, on a le résultat suivant qui est couramment utilisé en physique :

Soient A et B deux réels non tous nuls, alors il existe $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A\cos x + B\sin x = r\cos(x - \varphi).$$

On a de plus les relations suivantes :

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}\ ,\ \cos\varphi = \frac{A}{r} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{B}{r}.$$

(i) Le symbole $\forall$ se lit « pour tout ».

(ii) En physique, r s'appelle l'amplitude et φ la phase.

(iii) Le résultat précédent exprime le fait que la somme de deux signaux sinusoïdaux de même période est encore un signal sinusoïdal de même période, mais déphasé par rapport aux signaux de départ.

5 Formules de linéarisation

Les formules de linéarisation permettent de transformer des produits de sinus et cosinus en sommes de sinus et cosinus. Ces formules seront très utiles par la suite, notament pour calculer des intégrales. Elle seront aussi utilisées en physique et en SI.

Proposition 5.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$,

(ii) $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, alors :

(iii) $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$.

Proposition 5.2 (*Formules de linéarisation*)

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *On a :*

i) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$,

ii) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$,

iii) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$.

Exemple 5.3

Calculer les intégrales $\int_0^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin x \,\mathrm{d}x$.

6 Formules de factorisation

Inversement, les formules de factorisation permettent de transformer des sommes de sinus et cosinus en produit de sinus et cosinus. Ces formules seront utiles pour la résolution d'équations trigonométriques.

Proposition 6.1 (*Formules de factorisation*)

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *On a :*

i) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ *ii)* $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ *iv)* $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ *et* $y \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, *alors :*

v) $\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$, *vi)* $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$.

Exemple 6.2

Résoudre sur $\mathbb{R}$, puis sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, l'équation $\cos x + \cos(2x) = 0$.

7 Formules de changement de variable

Les formules de changement de variables seront utilisés pour le calcul d'intégrales.

Proposition 7.1 (*Formules de changement de variable*)

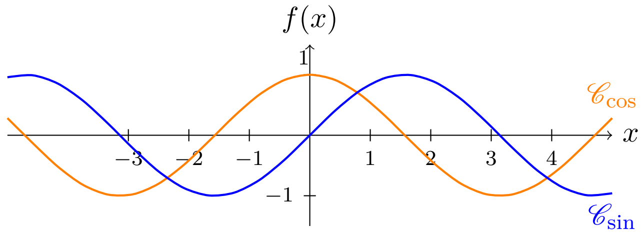
Soit $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \not\equiv \pi\,[2\pi]$. *Posons* $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. *On a*

i) $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$;

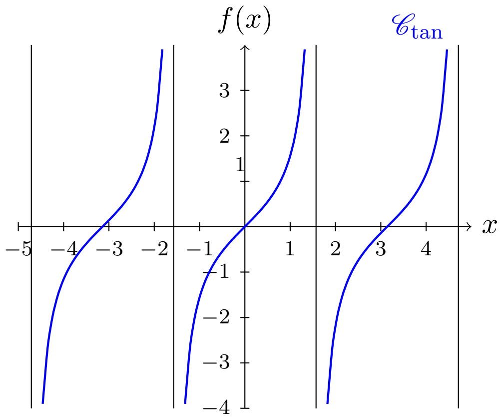
ii) $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$.

Remarque 7.2
Ces formules seront surtout utilisées pour calculer des intégrales complexes qui seront étudiées plus tard dans l'année.

8 Représentations graphiques



Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus



Représentation graphique de la fonction tangente