Chapitre 5 : Ensembles, applications, raisonnements

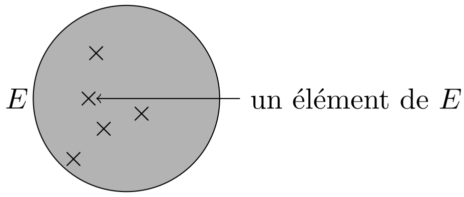
I Ensembles

II Applications

III Raisonnements

I Ensembles

Un **ensemble** E est objet mathématique qui peut comprendre des **éléments**. Une analogie intuitive peut être de considérer qu'un ensemble est un ≪ sac ≫ qui contient les éléments de ce sac. On utilisera souvent les représentations suivantes :



1 Inclusion, appartenance

Définition 1

Soit E un ensemble. Lorsque x est un élément de E, on note $x \in E$. Lorsque x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

Définition 2

On appelle ensemble vide l'ensemble qui ne contient aucun élément et on le note $\emptyset$.

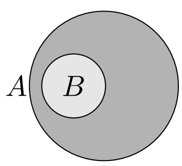
Définition 3

Soit A et B deux ensembles. On dit que

- A **est inclus dans** B lorsque tout élément de A appartient à B et on note $A \subset B$;
- les ensembles A et B **sont égaux** lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$ et on note $A = B$.

Remarque 4

Figure 1 (*Inclusion de B dans A*)



Exemple 5

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

1. $a \in E$;
2. $a \subset E$;
3. $\{a\} \subset E$;
4. $\emptyset \in E$;
5. $\emptyset \subset E$;
6. $\{\emptyset\} \subset E$?

2 Quantificateurs

Définition 6

Soit E un ensemble. On considère une propriété $P(x)$ qui dépend de $x \in E$.

(i) Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour **tout** élément x de E, on écrit :

$$\forall x \in E, \quad P(x).$$

(ii) Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour **au moins un** élément x de E, on écrit :

$$\exists x \in E, \quad P(x).$$

Remarque 7

Les quantificateurs **ne** peuvent être utilisés comme abréviation du français et seront utilisés uniquement dans des formulations purement mathématiques (voir les exemples).

Exemple 8

(i) La propriété : « tout carré de nombre réel est positif » se réécrit :

(ii) La propriété : « il existe un réel α tel que $\alpha^3 + \alpha = 1$ » se réécrit :

(iii) La propriété : « pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$ » se réécrit :

3 Description d'un ensemble

Il existe plusieurs manière de définir un ensemble.

- On peut définir un ensemble par une phrase en français. Par exemple :

- On peut décrire un ensemble en citant les éléments qui le composent. On dit que l'ensemble est décrit en énumération ou en extension. Par exemple :

- On peut décrire un ensemble B en mentionnant les éléments d'un autre ensemble A vérifiant une certaine propriété. On dit dans ce cas qu'on écrit l'ensemble en compréhension et on a dans ce cas $B \subset A$. Par exemple :

Exemple 9

1. Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.
2. Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$.
3. Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
4. Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Définition 10

Soit E un ensemble. On appelle **sous-ensemble de** E tout ensemble A tel que $A \subset E$.
L'**ensemble des parties de** E, qui est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E, est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 11

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ où E est un ensemble. Décrire en extension l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

4 Opérations sur les ensembles

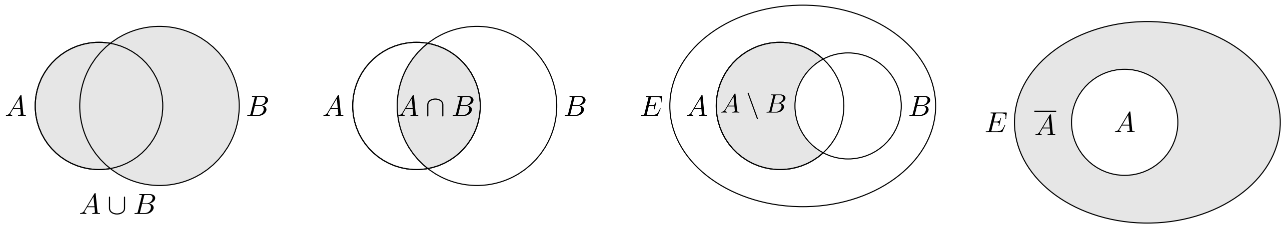
Définition 12

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On appelle :

- **réunion** de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou B noté
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$
- **intersection** de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et B noté
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$
- **différence** de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B noté
$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$
- **complémentaire** de A dans E l'ensemble des éléments qui appartiennent à E mais pas à A noté
$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

On note également le complémentaire de A dans E $\complement_E^A$ ou $\overline{A}$.

Figure 2 (*Réunion, intersection, différence, complémentaire*)



Remarque 13

La signification du **ou** en mathématiques peut être différente du sens en français, c'est un **ou** inclusif : un élément qui est dans $A \cup B$ peut être à la fois dans A et dans B contrairement au sens donné en français qui est plutôt un « ou bien » dans la majorité des cas comme dans « fromage ou dessert ».

Remarque 14

On peut faire des réunions ou des intersections de plus de deux ensembles $A \cup B \cup C$ ou $A \cap B \cap C \ldots$ En revanche, il faut faire attention aux parenthèses lorsqu'on utilise en même temps la réunion et l'intersection.

Proposition 15 (*Distributivité*)

Soit A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E. On a :

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Démonstration : Soit A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E. On va procéder par équivalence.

(i)

(ii) Le second énoncé se démontre de la même façon.

□

Exemple 16

Simplifier $\Big(]-\infty, 0] \cap \big([0,2] \cup [3, 1000]\big)\Big) \cap \{\pi + \pi\mathbb{Z}\}$.

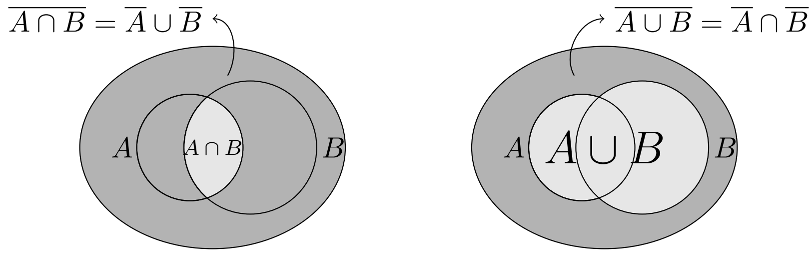
Proposition 17 (*Lois de De Morgan*)

Soit A, B des sous-ensembles d'un ensemble E. On a :

(i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Figure 3 (*Lois de De Morgan*)



Les dessins sont très utiles pour comprendre les démonstrations voire les remplacer.

Démonstration : Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On procède par équivalence.

(i)

(ii) Le second énoncé se démontre de la même manière.

□

Exemple 18

5 Produit cartésien d'ensembles

Définition 19

Soit E et F des ensembles. On définit l'ensemble $E \times F$, appelé produit cartésien de E par F, comme l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$, des ensembles. On définit $E_1 \times \cdots \times E_n$, appelé produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$, l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$:

En particulier, on note $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$.

Exemple 20

Remarque 21

Remarque 22

Pour $n = 3$, (x_1, x_2, x_3) est un triplet. Pour $n = 4$, (x_1, x_2, x_3, x_4) est un quadruplet, etc... Lorsque n est quelconque, on dit n-uplet.

Remarque 23

On peut parfois définir des opérations sur les n-uplets. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a défini l'addition dans $\mathbb{C}$ donc on peut également définir l'addition dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$: pour tous $(x, z), (y, z') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$:

$$(x, z) + (y, z') = (x + y, z + z').$$

6 Ensembles de nombres

6.1 Ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$.

Définition 24

On appelle :

- ensemble des **entiers naturels** que l'on note $\mathbb{N}$ l'ensemble
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}\,;$$
- ensemble des **entiers relatifs** que l'on note $\mathbb{Z}$ l'ensemble
$$\mathbb{Z} = \{p \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{-p \mid p \in \mathbb{N}^*\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}\,;$$
- ensemble des **nombres décimaux** que l'on note $\mathbb{D}$ l'ensemble
$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^\alpha} \mid p \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathbb{N} \right\};$$
- ensemble des **nombres rationnels** que l'on note $\mathbb{Q}$ l'ensemble
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Remarque 25

Remarque 26

Nous nous limitons à cette définition de $\mathbb{N}$ qui reste imprécise. En revanche, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont définis à partir de $\mathbb{N}$. On ne donne pas de définition précise de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$: ils sont définis comme limites de certaines suites de $\mathbb{Q}$. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ a été défini à partir des nombres réels dans le chapitre 3.

6.2 Partie entière d'un nombre réel.

On va admettre le résultat suivant qui est la conséquence de la construction des nombres réels que nous n'avons pas faite.

Proposition 27 (*Propriété d'Archimède*)

Pour tout réel x, il existe un entier naturel n strictement plus grand que x.

Exemple 28

Par exemple, si $x = \pi$, $4, 5, 6$ sont strictement plus grands que x.

Théorème 29 (*Définition de la partie entière*)

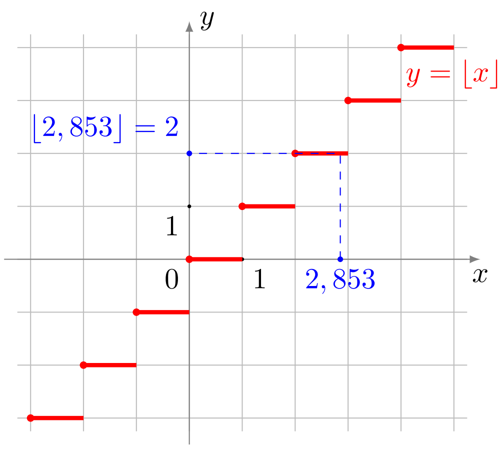
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif, appelé **partie entière de** x, noté $\lfloor x \rfloor$, tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Figure 4 (*Droite réelle et partie entière*)

Exemple 30

Figure 5 (*Représentation graphique de la fonction partie entière*)



Démonstration du théorème 29 :
On va montrer séparément l'existence et l'unicité.

$\square$

II Applications

Dans toute cette partie E, F, G désignent des ensembles quelconques.

1 Définitions

Définition 31

On appelle application de E dans F un objet mathématique qui à tout élément de E associe un unique élément de F noté $f(x)$.
L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.
E est appelé **ensemble de départ** et F **ensemble d'arrivée**.

On note ces objets :

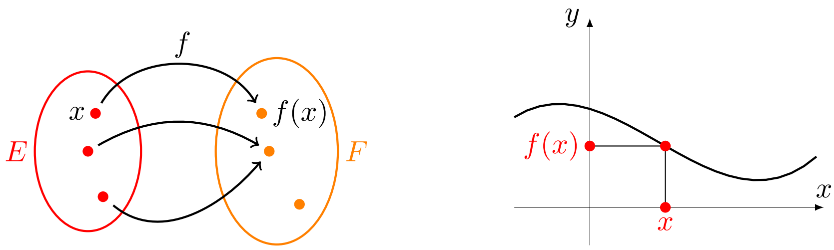
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Remarque 32

Il ne faut pas confondre f qui est une application et $f(x)$ qui est un élément de F. L'application est, sur les dessins suivants, l'ensemble de toutes les **flèches**. Deux applications f de E dans F et g de E' dans F' sont égales si et seulement $E = E'$, $F = F'$ et pour tout $x \in E$:

$$f(x) = g(x).$$

Figure 6 (*Définition d'une application*)



Exemple 33

On donne deux autres applications qu'on utilisera :

Définition 34

(i) On appelle **identité** de E, l'application

(ii) Pour $A \subset E$, on appelle **indicatrice** de A, l'application

Définition 35

Soit f une application de E dans F. On appelle :

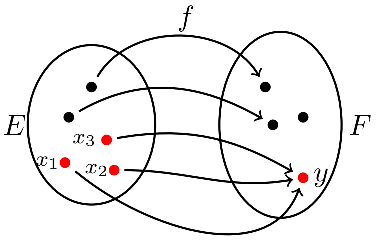
(i) **image** d'un élément $x \in E$, l'élément de F noté $f(x)$;

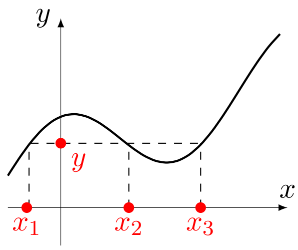
(ii) **antécédent** d'un élément $y \in F$ tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Remarque 36

Un élément de E a toujours une seule image. En revanche un élément de F peut avoir plusieurs antécédents.

Figure 7 (*Antécédent, image*)





Sur ce dessin, x_1, x_2 et x_3 ont pour image y et y a pour antécédents x_1, x_2 et x_3.

Exemple 37

2 Composition, restriction

2.1 Composée

Définition 38

Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle composée de f par g l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f \quad : \quad \begin{array}{rcl} E & \to & G \\ x & \mapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}.$$

On a le schéma :

Corollaire 39

Soit f une application de E dans F. On a :

2.2 Restriction

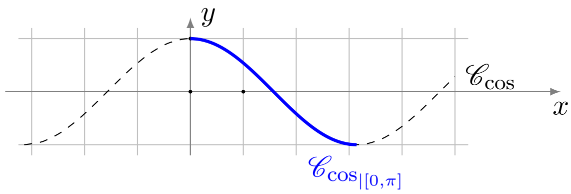
Définition 40

Soit f une application de E dans F et $A \subset E$. On appelle restriction de f à A notée $f_{|A}$, l'application définie par :

$$f_{|A} \; : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Exemple 41

La représentation graphique de $\cos_{|[0,\pi]}$ est donnée par :



Commentaire :

3 Image directe, image réciproque

3.1 Image directe

Définition 42

Soit f une application de E dans F et $A \subset E$. On appelle **image** de A par f, l'ensemble de toutes les images de tous les éléments de A noté $f(A)$:

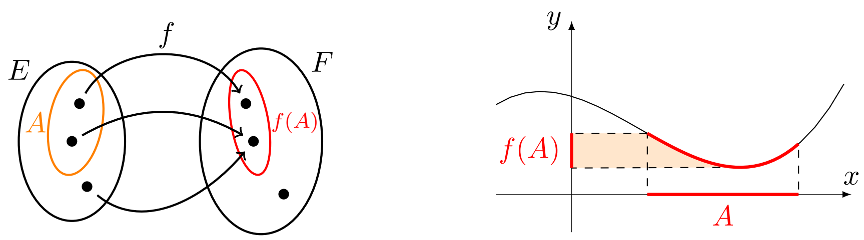
$$f(A) = \{y \in F \mid \text{il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

On note également $f(E) = \operatorname{Im}(f)$.

Remarque 43

Il faut bien faire attention au fait qu'une image directe est un sous-ensemble de F.

Figure 8 (*Image directe*)



Exemple 44

3.2 Image réciproque

Définition 45

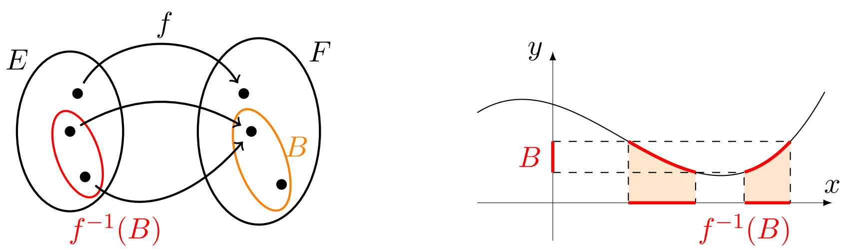
Soit f une application de E dans F et $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f, l'ensemble de toutes les antécédents des éléments de B par f et noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Remarque 46

Il faut bien faire attention au fait qu'une image réciproque est un sous-ensemble de E. De plus, la notation $f^{-1}(B)$ est **très** ambiguë, elle ne signifie **pas** que l'application f est bijective et qu'il s'agit de l'application réciproque de f.

Figure 9 (*Image réciproque*)



Exemple 47

Remarque 48

4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

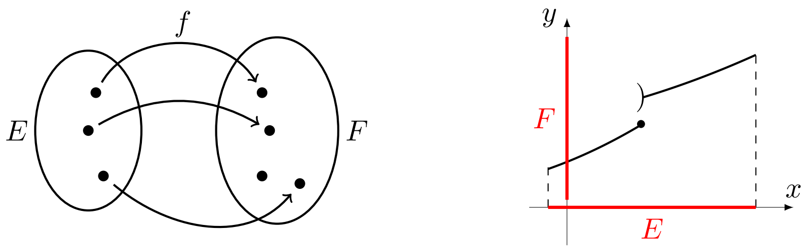
4.1 Injectivité

Définition 49

Soit f une application de E dans F. On dit que f est injective si et seulement si, pour tous $x, x' \in E$,

$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Figure 10 (*Applications injectives*)



Remarque 50

De manière équivalente, une application f de E dans F est injective si pour tous $x, x' \in E$,

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

Exemple 51

Remarque 52

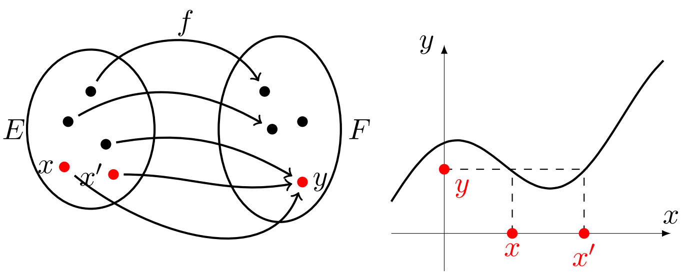
Pour dire qu'une application est injective, il faut bien préciser ses ensembles de départ et d'arrivée. Par exemple, en considérant

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2\end{array} \quad \text{et} \quad g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2\end{array}$$

f est injective alors que g ne l'est pas (on a $g(2) = g(-2) = 4$ mais $2 \neq -2$).

Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments de E différents qui ont la même image.

Figure 11 (*Exemples d'applications non injectives*)



Proposition 53 (*Composée de deux injections*)

La composée de deux applications injectives est injective.

Démonstration :

□

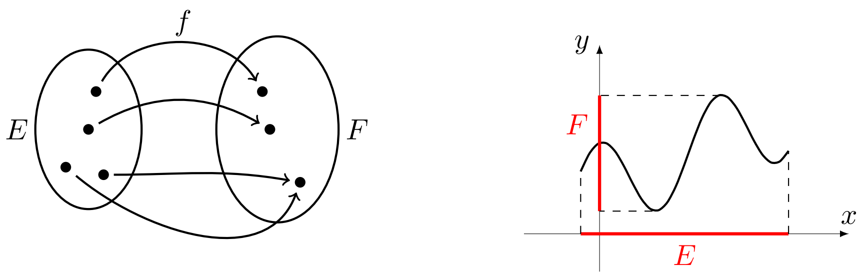
4.2 Surjectivité

Définition 54

Soit f une application de E dans F. On dit que f est surjective si

$$\text{pour tout } y \in F, \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

Figure 12 (*Applications surjectives*)



Exemple 55

Remarque 56

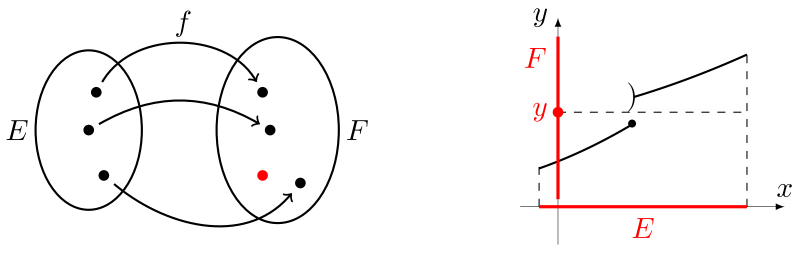
Pour dire qu'une application est surjective, il faut bien préciser ses ensembles de départ et d'arrivée. Par exemple, en considérant

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array},$$

f est surjective alors que g ne l'est pas (-1 n'admet pas d'antécédent par g).

Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément de F qui n'admet pas d'antécédent.

Figure 13 (*Exemples d'applications non surjectives*)



Théorème 57

Une application f de E dans F est surjective de E dans $f(E)$.

Démonstration :

$\square$

Proposition 58 (*Composée de deux surjections*)

La composée de deux applications surjectives est surjective.

Démonstration :

□

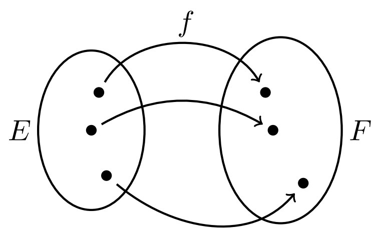
4.3 Bijectivité

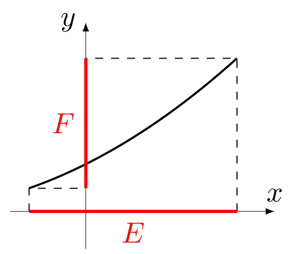
Définition 59

Soit f une application de E dans F. On dit que f est bijective si elle est injective et surjective. Une application f de E dans F est donc bijective si et seulement si

$$\text{pour tout } y \in F, \text{ il existe un unique } x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

Figure 14 (*Applications bijectives*)





Exemple 60

Remarque 61

Soit f une application de E dans F. Pour tout $y \in F$, l'équation d'inconnue $x \in E$:

$$y = f(x)$$

possède

(i) **au moins** une solution si et seulement si f est surjective ;

(ii) **au plus** une solution si et seulement si f est injective ;

(iii) **exactement une unique** solution si et seulement si f est bijective.

La caractérisation (iii) a d'ailleurs permis dans le chapitre 1 de montrer, à l'aide du théorème de la bijection, des existences et des unicités de solutions à des équations sans connaître ni la forme ni l'expression de la solution.

Définition 62

Soit f une application bijective de E dans F. On appelle **application réciproque**, que l'on note f^{-1}, l'application de F dans E qui vérifie :

$$\text{pour tout } x \in E \text{ et pour tout } y \in F, \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Proposition 63

Soit f une bijection de E dans F et f^{-1} son application réciproque. On a :

$$f \circ f^{-1} = \qquad\qquad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \qquad\quad .$$

Démonstration : Soit f une bijection de E dans F et f^{-1} son application réciproque.
Soit $y \in F$. On a : $x = f^{-1}(y) \in E$ et, d'après la définition d'une bijection réciproque :

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y).$$

En conclusion $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Soit $x \in E$. On a : $y = f(x) \in F$ et, d'après la définition d'une bijection réciproque :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x).$$

En conclusion $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. □

Proposition 64 (*Caractérisation d'une bijection*)

Soit f une application de E dans F. Alors f est bijective si et seulement si il existe une application g de F dans E qui vérifie :

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

et dans ce cas, g est l'application réciproque de f : $g = f^{-1}$.

Démonstration :

$\square$

Remarque 65

Exemple 66

On considère les applications :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \end{array}.$$

On admet que f et g sont bien définies. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Qu'en déduire ?

Exemple 67

Soit E, F des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

III Raisonnements

On appelle **énoncé** une phrase mathématique.

Exemple 68

Des exemples d'énoncés :

1. Toute fonction définie et dérivable sur un intervalle I est continue sur I.
2. $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1, \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad z = e^{i\theta}$.

1 Négation d'un énoncé

La **négation d'un énoncé** P est l'énoncé contraire de P.

Exemple 69

Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) La négation de ≪ $x = 0$ ≫ est ≪ $x \in \mathbb{R}^*$ ≫.

(ii) La négation de ≪ x est solution de $x^2 + 1 = 0$ ≫ est ≪ x n'est pas solution de $x^2 + 1 = 0$ ≫ ou alors, en reformulant, ≪ x vérifie $x^2 + 1 \neq 0$ ≫.

Exemple 70

Soit f une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.

2 Réciproque, contraposée, contre-exemple.

2.1 Réciproque

Si un énoncé P implique un énoncé Q, on dit que P est une **condition suffisante** pour Q et que Q est une **condition nécessaire** pour P. La **réciproque** d'un énoncé de la forme P implique Q est Q implique P.

Exemple 71

2.2 Contre-exemple

On appelle **contre-exemple** un cas particulier qui permet de montrer qu'un énoncé est faux.

Exemple 72

2.3 Contraposée

Si un énoncé P implique Q est vraie, alors l'énoncé ≪ (négation de Q) implique (négation de P) ≫ est également vrai : on l'appelle **contraposée**.

Exemple 73

3 Exemples de raisonnements

Cette partie permettra de remettre en perspective tous les raisonnements faits depuis le début de l'année et qui seront utilisés cette année et la suivante : les exemples donnent notamment des rédactions modèles. La difficulté d'un exercice vient souvent du choix du raisonnement même si plusieurs types de raisonnements sont possibles.
Pour résoudre un exercice, on pourra suivre la méthode :

1. Quel raisonnement vais-je utiliser ?
2. Quels objets faut-il manipuler pour démontrer ce que je souhaite et que dois-je démontrer ?
3. Quels théorèmes ou propriétés dois-je utiliser ?

Parfois les objets sont donnés (par exemple, une fonction f définie par un énoncé) et dans ce cas, on sait exactement quels objets on va manipuler, ils ont déjà un nom.

Dans d'autres cas, les objets ne sont pas donnés (un énoncé du type ≪ Montrer que toute fonction ... est ... ≫ ou ≪ Montrer que pour tout $x \in E$ ... ≫ et dans ce cas il faudra commencer le raisonnement par : ≪ Soit f une fonction ... ≫ ou ≪ Soit $x \in E$. ≫.

Les exemples suivants, très simples, vous aideront à la rédaction d'exercices de plus en plus complexes.

3.1 Raisonnement par implication

Il s'agit du raisonnement le plus courant : pour montrer que qu'un énoncé P implique un énoncé Q, on suppose P et on démontre Q.

Exemple 74

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x^2 = y^2$ alors $|x| = |y|$.

Rédaction	**Méthode**
Soit $x, y \in \mathbb{R}$.	On manipule des réels x et y.
On suppose que $x^2 = y^2$.	On suppose le premier énoncé.
On a donc : $x^2 - y^2 = 0$ c'est-à-dire $(x-y)(x+y) = 0$. Par suite $x = y$ ou $x = -y$.	On raisonne en utilisant le fait que deux nombres égaux ou opposé ont la même valeur absolue.
En conclusion, $|x| = |y|$.	On conclut car on a démontré le second énoncé.

Exemple 75

Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à la fois croissante et décroissante sur $\mathbb{R}$ est constante sur $\mathbb{R}$.

3.2 Raisonnement par équivalence

Pour montrer qu'un énoncé P est équivalent à un énoncé Q, on raisonne par équivalences successives ou on procède par double implication en montrant que P implique Q et que Q implique P.

Exemple 76

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x = \sqrt{x^2+1}$ si et seulement si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Rédaction	**Méthode**
Soit $x \in \mathbb{R}$.	On manipule un réel x.
On suppose que $2x = \sqrt{x^2+1}$.	On suppose le premier énoncé pour montrer le second.
On a : $(2x)^2 = x^2 + 1$, c'est-à-dire $3x^2 = 1$, puis $x^2 = \frac{1}{3}$. Or, comme $2x = \sqrt{x^2+1} \geq 0$, x est positif.	On raisonne en remarquant que x doit être positif.
Ainsi, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.	On a démontré le second énoncé.
Réciproquement, supposons que $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.	On suppose le second énoncé.
On a : $x^2 + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$.	On raisonne en faisant un calcul.
Ainsi $\sqrt{x^2+1} = 2x$.	On a démontré le premier énoncé.
En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x = \sqrt{x^2+1}$ si et seulement si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.	On conclut.

Exemple 77

Montrons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $A \subset \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in A$, $|f(x)| \leq C$.

Remarque 78

On pourra parfois montrer directement une équivalence sans faire de double implication.

3.3 Raisonnement par contraposition

Pour montrer que P implique Q, on montre en fait que (négation de Q) implique (négation de P).

Exemple 79

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair alors n est pair.

Rédaction	**Méthode**
Soit $n \in \mathbb{N}$.	On manipule un entier n.
On suppose que n est impair.	On va procéder par contraposition et démontrer que si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair, c'est-à-dire : si n est impair alors n^2 est impair.
Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.	On traduit le fait que n est impair.
On a :	
$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Comme $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, n^2 est un entier impair.	On raisonne en démontrant que n a la forme d'un entier impair.
Par contraposition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est un entier pair, n est un entier pair.	On conclut.

Exemple 80

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, $|a| < \varepsilon$, alors $a = 0$.

3.4 Raisonnement par disjonction des cas

Pour établir une propriété P, on discute tous les cas qui conduisent à P.

Exemple 81

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Rédaction	**Méthode**
Soit $n \in \mathbb{N}$.	On manipule un entier n.
1^{er} cas : n est impair.	On commence par traiter le cas où n est impair.
Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et on a :	
$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} \\ &= (2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$	On raisonne.
2^e cas : n est pair.	On traite ensuite le cas où n est pair.
Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et on a :	
$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{(2k)(2k+1)}{2} \\ &= k(2k+1) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$	On raisonne.
Dans tous les cas $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.	On conclut.

Exemple 82

Montrer que pour tous réels x, y,

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x-y|\right).$$

3.5 Raisonnement par l'absurde

Pour établir un énoncé, on suppose qu'il est faux et on montre qu'on a une contradiction.

Exemple 83

Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ n'est pas un nombre rationnel.

Rédaction	**Méthode**
Supposons que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$.	On suppose que ce que l'on veut démontrer est faux, c'est-à-dire ici que $\ln 2/\ln 3$ est un nombre rationnel.
Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $$\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}.$$	On traduit l'appartenance à $\mathbb{Q}$ et on raisonne.
On a : $q \ln 2 = p \ln 3$ puis $\ln 2^q = \ln 3^p$ et enfin $$2^q = 3^p.$$	
Or 2^q est un nombre pair et 3^q est un nombre impair ce qui constitue une contradiction.	On met en avant une contradiction.
En conclusion, $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$.	On conclut.

Exemple 84

Montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.

3.6 Raisonnement par analyse synthèse

Pour établir l'existence d'une solution à un problème donné, on analyse sa forme sous réserve d'existence, puis on vérifie que la forme obtenue convient avant de conclure.

Exemple 85

Montrer qu'il existe une unique fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y.$$

Rédaction	**Méthode**
Analyse : Supposons qu'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $$f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y.$$	On suppose l'existence de l'objet que l'on cherche et on tente de trouver sa forme.

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en posant $y = f(x)$ dans l'égalité précédente, on a :

$$f(0) = f\big(f(x) - f(x)\big) = 2 - x - f(x)$$

ce qui s'écrit $f(x) = 2 - f(0) - x$. En considérant le cas $x = 0$, on a :

$$f(0) = 2 - f(0) - 0$$

ce qui donne $f(0) = 1$.

On raisonne pour essayer de trouver la forme de f. On obtient une expression de f en fonction de $f(0)$ puis la valeur de $f(0)$.

Ainsi, f est la fonction $f : x \mapsto 1 - x$.

On a trouvé une forme pour f.

Synthèse : Considérons $f : x \mapsto 1 - x$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f\big(x - f(y)\big) &= f\big(x - (1 - y)\big)\big) \\ &= 1 - \big(x - (1 - y)\big) \\ &= 2 - x - y \end{aligned}$$

donc f est bien solution du problème.

On vérifie que la fonction f trouvée dans la partie « Analyse » du raisonnement est bien une solution de notre problème.

L'unique solution du problème est la fonction

$$f : x \mapsto 1 - x.$$

On conclut.

Exemple 86

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$.

3.7 Raisonnement par récurrence simple

Si $P(n)$ est une propriété qui dépend d'un entier naturel n qui vérifie

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie (initialisation)}\,; \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P(n) \text{ implique } P(n+1) \text{ (hérédité)}\,; \end{cases}$$

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 87

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Rédaction	**Méthode**
On montre, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$	On fixe ce que l'on démontre (c'est plus clair).
Pour $n = 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k \times k! = 1 \times 1! = 2! - 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.	On initialise.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$	On considère un entier n et on suppose la propriété vraie au rang n : c'est l'hypothèse de récurrence
On a : $$\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} k \times k! + (n+1) \times (n+1)!$$ Par hypothèse de récurrence : $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \times k! &= (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! \\ &= (n+1)!(1+n+1) - 1 \\ &= (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1 \end{aligned}$$	On raisonne pour montrer l'égalité souhaitée au rang $n+1$.
ce qui achève la récurrence.	On conclut.

Remarque 88

On n'a pas écrit dans le raisonnement précédent « Initialisation » et « Hérédité ». Si le raisonnement est présenté clairement comme dans la forme précédente ce n'est pas nécessaire.

Exemple 89

On pose $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est dérivable n fois et que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+x)^n}.$$

Remarque 90

Une propriété $P(n)$ peut être vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, on effectue l'initialisation pour $n = 1$. De façon générale, pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$ où n_0 est un entier fixé, on effectue l'initialisation à $n = n_0$.

3.8 Raisonnement par récurrence forte

Si $P(n)$ est une propriété qui dépend d'un entier naturel qui vérifie

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie (initialisation),} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \big(P(0), P(1), \dots, P(n)\big) \text{ impliquent } P(n+1) \text{ (hérédité),} \end{cases}$$

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 91

On considère une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

On pose $r = u_1 - u_0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n\,r$.

Rédaction	**Méthode**
On montre, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété : $$u_n = u_0 + n\,r.$$	On fixe ce que l'on démontre (c'est plus clair).
Pour $n = 0$, on a : $$u_0 = u_0 + 0\,r$$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.	On initialise.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout entier $k \leq n$, on a : $$u_k = u_0 + k\,r.$$	On considère un entier n et on suppose la propriété vraie à tous les rangs plus petits que n.
On a, comme $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$: $$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}.$$ Or, par hypothèse, $u_{n-1} = u_0 + (n-1)\,r$ et $u_n = u_0 + n\,r$ donc : $$\begin{aligned} &u_{n+1} \\ &= 2\big(u_0 + n\,r\big) - \big(u_0 + (n-1)\,r\big) \\ &= u_0 + \big(2n - (n-1)\big)\,r \\ &= u_0 + (n+1)\,r \end{aligned}$$	On raisonne pour montrer la propriété au rang $n+1$.
ce qui achève la récurrence.	On conclut.

Exemple 92

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Remarque 93

À nouveau, pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$ où n_0 est un entier fixé, on effectue l'initialisation à $n = n_0$.

4 Quelques conseils de rédaction

4.1 Toujours introduire les objets manipulés.

Si on manipule un objet $x, M, f, \ldots$ c'est soit qu'il est défini dans l'énoncé, soit qu'il a été introduit au moyen d'un :

$$\text{Soit } x \in \cdots \quad \text{Soit } M \in \cdots \quad \text{Soit } f \in \cdots$$

Exemple 94

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$.

Mauvaise rédaction : $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$.
Cette rédaction n'est pas bonne car x n'est pas introduit.
Bonne rédaction : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$.

4.2 Faire ressortir les articulations logiques.

Il est nécessaire de montrer que ce qui est rédigé s'appuie sur un raisonnement et quelles sont les propriétés et les théorèmes qui sont utilisés.

Exemple 95

Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\sqrt{1 - x^2} \in [0, 1]$.

Mauvaise rédaction : Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{gathered} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq x^2 \leq 1 \\ 0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1. \end{gathered}$$

Cette rédaction n'est pas bonne car elle ne fait pas ressortir les articulations logiques qui ont mené à bien le raisonnement et peut s'apparenter à du bluff de la part de l'auteur.

Bonne rédaction : Soit $x \in [0,1]$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, $0 \leq x^2 \leq 1$, ou encore : $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$. De plus, la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc : $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$. En conclusion :

$$\sqrt{1-x^2} \in [0,1].$$

Remarque 96

On ne peut utiliser $\forall$, $\exists$, $\implies$, $\Leftrightarrow$, ...comme des abréviations ou les mélanger avec du français : ces symboles ont un sens précis et leur utilisation est délicate.

4.3 Fonctions

On donne ici des exemples :

Exemple 97

Mauvaise rédaction : La fonction $e^x \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Cette rédaction n'est pas bonne car $e^x \sin x$ est une expression et non une **fonction**.

Bonne rédaction : La fonction $x \mapsto e^x \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple 98

Mauvaise rédaction : La fonction $x \mapsto e^x$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Cette rédaction n'est pas bonne pour une raison plus subtile : la propriété de croissance d'une fonction (parmis d'autres propriétés) ne peut être en un réel x mais **sur** un ensemble.

Bonne rédaction : La fonction $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 99

Mauvaise rédaction : On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(e^x)' = e^x$.
e^x est un réel et on ne peut dériver un réel mais une fonction.

Bonne rédaction 1 : On a : $\exp' = \exp$.

Bonne rédaction 2 : On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$.

4.4 Éviter le piège de la notation classique.

Pour bien retenir le cours, les notations employées sont souvent les mêmes. Par exemple, on note très souvent un trinôme du second degré $a\,x^2 + b\,x + c$ et le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Mais a, b, c, Δ peuvent désigner autre chose : par exemple Δ pourrait être une droite. On donne un exemple.

Exemple 100

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par : $x^2 + 3x - 2 = 0$.

Mauvaise rédaction : $\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0$, donc $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Ce type de rédaction est maladroite, même si elle est compréhensible. En effet, les quantités $\Delta, a, b, c, x_1, x_2$ ne sont pas introduites et on ne sait pas ce qu'elles signifient.

Bonne rédaction 1 : Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation $x^2 + 3x - 2 = 0$ peut s'écrire $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 3$, $c = -2$. Son discriminant Δ vaut $\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0$. Finalement l'équation possède deux solutions x_1 et x_2 données par

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

Cette rédaction est correcte mais extrêmement longue. On peut s'affranchir de Δ, a, b, c.
Bonne rédaction 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation $x^2+3x-2=0$ a pour discriminant : $3^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 17 > 0$.
Elle possède donc deux solutions

$$\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$$

(que l'on note respectivement x_1 et x_2).
La phrase « (que l'on note respectivement x_1 et x_2) » n'est pas nécessaire sauf si on veut réutiliser les deux racines plus loin et éviter de réécrire : $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ par exemple.