Chapitre 13 : Limites, continuité et dérivabilité des fonctions

I Généralités

Toute cette partie sera composée en partie de rappels de propriétés déjà vues au chapitre 1.

Définition 1

Une **fonction f d'une variable réelle à valeurs réelles** est une correspondance qui à tout élément $x \in \mathscr{D}(f) \subset \mathbb{R}$ associe au plus une image dans $\mathbb{R}$. La partie $\mathscr{D}(f)$ est alors appelée le **domaine de définition** de la fonction f.

Définition 2

On dit que :

(i) f est **paire** si pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, $-x \in \mathscr{D}(f)$ et $f(-x) = f(x)$;

(ii) f est **impaire** si pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, $-x \in \mathscr{D}(f)$ et $f(-x) = -f(x)$.

(iii) f est **périodique** si il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que si pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, $x + T \in \mathscr{D}(f)$ et $f(x+T) = f(x)$.

Dans tout le chapitre, les fonctions seront définies au moins sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existera toujours un intervalle I tel que $I \subset \mathscr{D}(f)$.

Exemple

Montrons que la fonction tangente est impaire et π-périodique.

1 Propriétés globales

On appelle une **propriété globale** toute propriété qui se produit **sur** un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Ce type de propriété s'énoncera toujours sous la forme

$$\ll \text{la fonction } f \text{ est } \ldots \textbf{ sur } \ldots \gg.$$

Dans toute cette partie, f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathscr{D}(f)$ et on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $I \subset \mathscr{D}(f)$.

1.1 Monotonie

Définition 3

On dit que :

(i) f est **croissante sur** I si pour tous $x, x' \in I$, $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$;

(ii) f est **décroissante sur** I si pour tous $x, x' \in I$, $x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$;

(iii) f est **strictement croissante sur** I si pour tous $x, x' \in I$, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;

(iv) f est **strictement décroissante sur** I pour tous $x, x' \in I$, $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$;

(v) f est **monotone sur** I si elle est croissante ou décroissante sur I ;

(vi) f est **strictement monotone** sur I si elle est strictement croissante ou décroissante sur I.

1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 4

On dit que :

(i) f est **majorée sur** I si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$;

(ii) f est **minorée sur** I si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$;

(iii) f est **bornée sur** I si il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq C$: c'est-à-dire si f est à la fois majorée et minorée sur I.

Exemple

Montrons que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2 Voisinage, propriété locale

Définition 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une propriété est vraie :

(i) au **voisinage de** a s'il existe un intervalle $[a-\delta, a+\delta]$ avec $\delta \in \mathbb{R}^{+,*}$ centré en a tel que la propriété est vraie sur

(ii) au **voisinage épointé de** a s'il existe un intervalle $[a-\delta, a+\delta]$ avec $\delta \in \mathbb{R}^{+,*}$ centré en a tel que la propriété est vraie sur

(iii) au **voisinage de** a **à droite** s'il existe un intervalle $]a, a+\delta]$ avec $\delta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que la propriété est vraie sur

(iv) au **voisinage de** a **à gauche** s'il existe un intervalle $[a-\delta, a[$ avec $\delta \in \mathbb{R}^{+,*}$ centré en a tel que la propriété est vraie sur

(v) au **voisinage de** $+\infty$ s'il existe un intervalle $[A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur

(vi) au **voisinage de** $-\infty$ s'il existe un intervalle $]-\infty, A]$ avec $A \in \mathbb{R}$ tel que la propriété est vraie sur

Remarque

Figure 6 (*Voisinages de* $a \in \mathbb{R}$)

Figure 7 (*Voisinages de* $+\infty$ *ou* $-\infty$)

Définition 8

On appelle **propriété locale** une propriété vérifiée au voisinage d'un réel a, de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Exemple

(i)

(ii)

II Limites

1 Limite finie en $a \in \mathbb{R}$

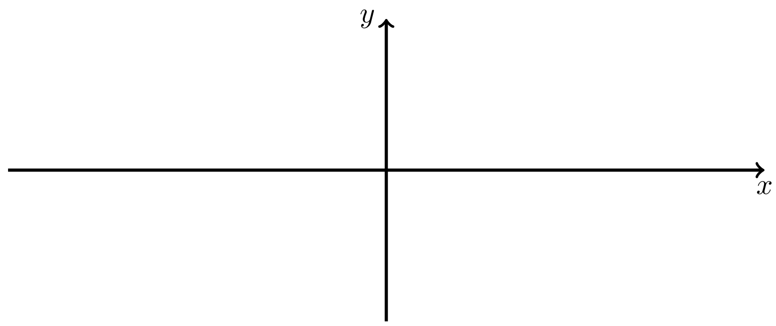
Définition 9

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f **admet une limite** $\ell \in \mathbb{R}$ **en** a et on note

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

si

Figure 10 (*Limite finie en a* $\in \mathbb{R}$)



Théorème 11

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a alors cette limite est unique.

Démonstration :

$\square$

Exemple

Montrons, avec la définition de la limite, que $x^2 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$.

Théorème 12

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a alors f **est bornée au voisinage de** a.

Démonstration :

$\square$

Proposition 13

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ avec $\ell > 0$ (respectivement $\ell < 0$) alors f est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de a.

Démonstration :

$\square$

2 Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$

Définition 14

Soit f une fonction définie sur I et au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** a et on note

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$$

si

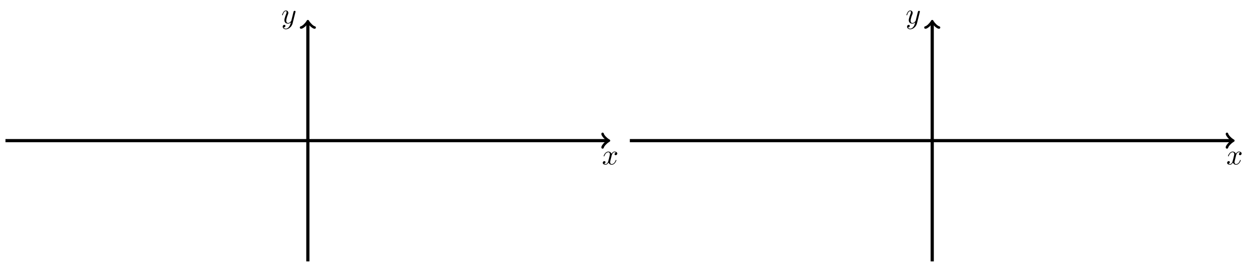
Définition 15

Soit f une fonction définie sur I et au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers** $-\infty$ **en** a et on note

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$$

si

Figure 16 (*Limite infinie en a* $\in \mathbb{R}$)



Exemple

Montrons, avec la définition de la limite, que $\dfrac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque

3 Limite finie à l'infini

Définition 17

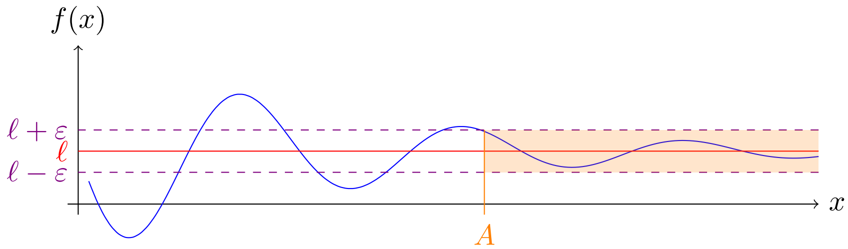
Soit f une fonction définie sur I et au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f **tend vers ℓ en $+\infty$** (respectivement $-\infty$) et on note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad (\text{respectivement } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell)$$

si our tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$:

$$x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad (\text{respectivement } x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Figure 18 (*Limite finie en $+\infty$*)



Théorème 19

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$). Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) alors f **est bornée au voisinage de $+\infty$** (respectivement $-\infty$).

Démonstration :

$\square$

Exemple

4 Limite infinie à l'infini

Définition 20

Soit f une fonction définie sur I et au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$). On dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) et on note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad (\text{respectivement} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty)$$

si our tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$:

$$x \geq A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq M \quad (\text{respectivement}\, x \leq A \implies f(x) \geq M).$$

Définition 21

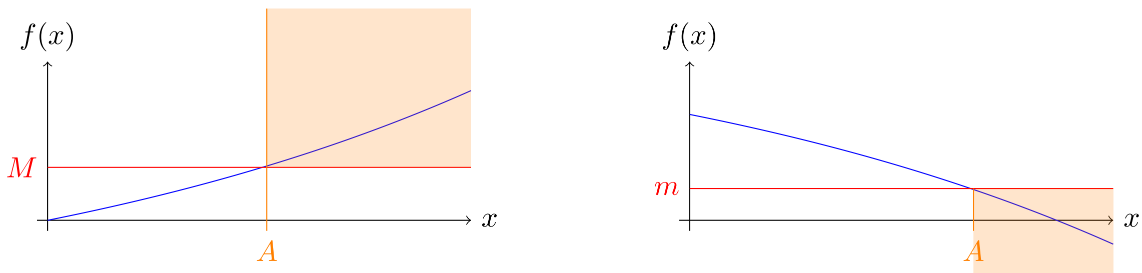
Soit f une fonction définie sur I et au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$). On dit que f **tend vers** $-\infty$ **en** $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) et on note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad (\text{respectivement} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty)$$

si our tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$:

$$x \geq A \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq m \quad (\text{respectivement}\, x \leq A \implies f(x) \leq m).$$

Figure 22 (***Limites infinies en*** $+\infty$)



Remarque

Une fonction ayant une limite infinie en $+\infty$ n'est donc pas bornée au voisinage de $+\infty$.

5 Limite à droite, limite à gauche

On rappelle que la notation $\overline{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des nombres réels auxquels on ajoute $+\infty$ et $-\infty$.

Définition 23

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie au voisinage de a à droite. On dit que f admet une limite à droite en a et on note :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$$

si dans les définitions 9, 14 et 15,

$$|x-a| \leq \delta \quad \text{est remplacé par} \quad 0 < x-a \leq \delta.$$

Définition 24

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie sur un voisinage de a à gauche. On dit que f admet une limite à gauche en a et on note :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$$

si dans les définitions 9, 14 et 15,

$$|x - a| \leq \delta \quad \text{est remplacé par} \quad 0 > x - a \geq -\delta.$$

Exemple

6 Opérations sur les limites

Proposition 25 (*opérations sur les limites*)

Soit f, g deux fonctions définies sur I et au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Les limites considérées dans les tableaux sont en a.

(i) soit $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(ii) soit $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors fg a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

(iii) soit $\ell \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Démonstration : (on démontre uniquement la case grisée pour $a \in \mathbb{R}$, les autres limites se traitant de façon analogue)

$\square$

Remarque

Le quotient de deux fonction s'obtient en écrivant $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$. Ainsi les formes indéterminées $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ n'apparaissent pas dans les tableaux.

Proposition 26 (*limite d'une fonction composée*)

Soit $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, f une fonction définie sur I et au voisinage de a, g une fonction définie sur J et au voisinage de b. On suppose que $f(I) \subset J$ de sorte que $g \circ f$ soit définie et que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} g(x) = c.$$

Alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c.$$

Démonstration : (on traite $a, b, c \in \mathbb{R}$: les cas $a, b, c = \pm\infty$ se traitant de façon analogue)
Soit $\varepsilon > 0$. On applique la définition de la limite de g. Il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $y \in J$ (la lettre y est muette) :

$$|y - b| \leq \delta_2 \implies |g(x) - c| \leq \varepsilon.$$

On applique maintenant la définition de la limite de f avec $\delta_2 > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| \leq \delta_1 \implies |f(x) - b| \leq \delta_2.$$

Soit $x \in I \cap [a - \delta_1, a + \delta_1]$. On a, par définition, $f(x) \in J$. Ainsi, en substituant $f(x)$ à y, dans la première implication, puisque $|f(x) - b| \leq \delta_2$:

$$|g(f(x)) - c| \leq \varepsilon.$$

En conclusion, pour tout $x \in I \cap [a - \delta_1, a + \delta_1]$:

$$|g \circ f(x) - c| \leq \varepsilon$$

qui est la définition de la limite de $g \circ f$ en a. □

Exemple

Remarque

Les opérations sur les limites sont également valables dans le cas de limites à droite ou à gauche.

7 Limites et inégalités

Proposition 27

Soit f, g deux fonctions définies sur I et au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si $b \in \mathbb{R}$ et que $|f(x) - b| \leq g(x)$ au voisinage de a avec $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

(ii) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a avec $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.

(iii) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a avec $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Démonstration : On traite d'abord le cas où $a \in \mathbb{R}$ pour (i) et (ii) (le (iii) se traite comme le (ii)).
Soit f, g deux fonctions définies sur I et au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
(i) On suppose que $|f(x) - b| \leq g(x)$ au voisinage de a avec $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \delta_1, a + \delta_1]$:

$$|f(x) - \ell| \leq g(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons la définition de la limite de g en a. Il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| \leq \delta_2 \implies |g(x)| \leq \varepsilon \implies g(x) \leq \varepsilon.$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. On a donc pour tout $x \in I \cap [a-\delta, a+\delta]$:

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \leq \varepsilon.$$

Par définition on a : $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Lorsque $a = \mp\infty$, il suffit de remplacer dans les démonstrations précédentes « il existe $|x-a| \leq \delta$ » par « il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A$ ou $x \leq A$ ». $\square$

Proposition 28 (*passage à la limite dans les inégalités*)

Soit f, g deux fonctions définies sur I sauf et au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

Démonstration : On raisonne par contraposition. Si $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) > 0$, alors par la proposition 1, $f - g$ est strictement positive au voisinage de a. $\square$

Remarque

Théorème 29 (*théorème d'encadrement*)

Soit f, g, h des fonctions définies sur I et au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f et h admettent la même limite en a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$

et que, au voisinage de a :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Alors g admet une limite en a et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x).$$

Démonstration :

$\square$

Remarque

Ces théorèmes s'étendent aux limites à droite et à gauche.

8 Image d'une suite par une fonction

Théorème 30

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, f une fonction définie sur I et au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ qui admet une limite en a et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I qui admet une limite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell.$$

Démonstration : On traite le cas où $a \in \mathbb{R}$, les cas $a = \pm\infty$ se traitant de manière analogue.

□

Remarque

On utilise notamment ce théorème sous forme de contraposée pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite : on exhibe deux suites qui tendent vers a mais dont les suites images ne tendent pas vers la même limite (voir l'exemple suivant).

Exemple

Montrons que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

9 Théorème de la limite monotone

Théorème 31 (*de la limite monotone*)

Soit f une fonction définie et croissante sur un intervalle $I = [a, b[$ avec $a < b$. On a l'alternative suivante :

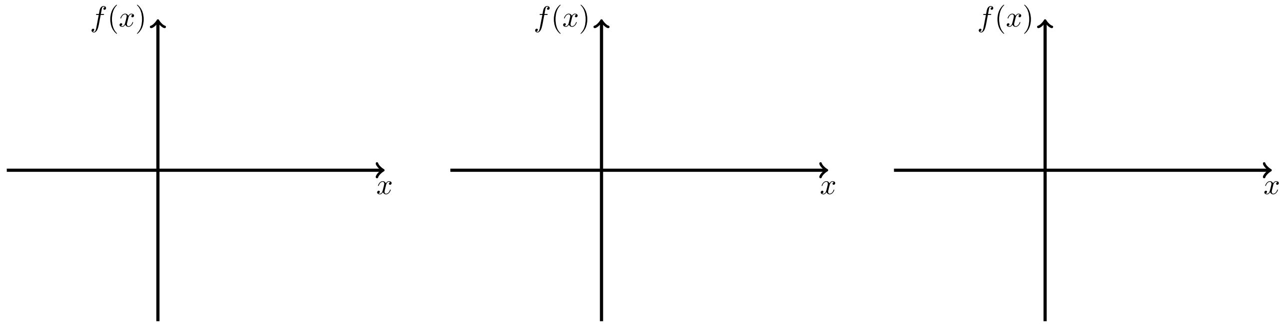
(i) si f est majorée sur $[a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \sup\limits_{x \in [a,b[} f(x)$;

(ii) si f n'est pas majorée sur $[a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

Remarque

Figure 32 (*Différents cas pour le théorème de la limite monotone*)

Ce théorème s'applique également pour des fonctions croissantes ou décroissantes sur des intervalles $[a, b[$ ou $]a, b]$:



Démonstration : On traite le cas où $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie et croissante sur un intervalle $I = [a, b[$.
(i) Supposons que f est majorée sur I. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a, b[: f(x) \leq M$. Ainsi l'ensemble $A = \{f(x) \mid x \in [a, b[\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et admet donc une borne supérieure qui est le plus petit des majorants de A. On pose $\ell = \sup(A)$. Montrons que f tend vers ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\ell - \varepsilon$ n'est pas une majorant de A, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que

$$\ell - \varepsilon \leq f(x_0).$$

Posons $\delta = b - x_0 > 0$. On a $x_0 = b - \delta$. Soit $x \in I \cap [b - \delta, b + \delta]$. Comme f est croissante, on a :

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Comme ℓ est un majorant de A, on a également :

$$f(x) \leq \ell \leq \ell + \varepsilon.$$

En conclusion, en combinant les trois inégalités, pour tout $x \in I$:

$$|x - b| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$$

ce qui s'écrit :

$$|x - b| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

qui est la définition de f tend vers ℓ.

(ii) Supposons que f n'est pas majorée sur I. Montrons que f tend vers $+\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que

$$M \leq f(x_0).$$

Posons $\delta = b - x_0 > 0$. On a $x_0 = b - \delta$. Soit $x \in I \cap [b - \delta, b + \delta]$. Comme f est croissante, on a :

$$f(x_0) \leq f(x).$$

En conclusion, en combinant les deux inégalités, pour tout $x \in I$:

$$|x - b| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad M \leq f(x)$$

qui est la définition de f tend vers $+\infty$. □

III Continuité

1 Définitions et opérations sur les fonctions continues

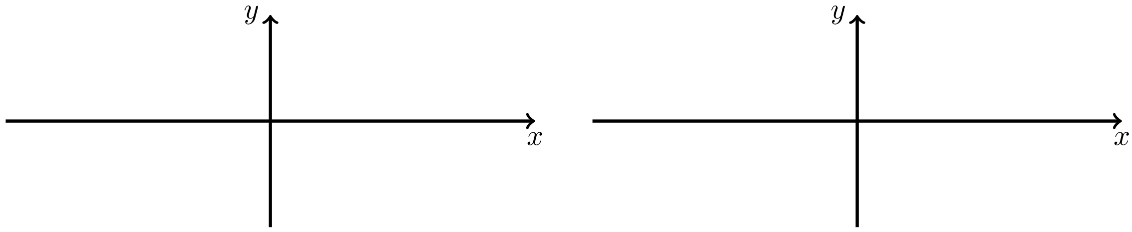
Définition 33

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.

- On dit que f est **continue en** a si elle admet une limite finie en a qui vérifie

- On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout point de l'intervalle I.

Figure 34 (*Fonction continue ou discontinue*)



Définition 35 (*continuité à droite ou à gauche*)

On dit que :

- f est continue à droite en a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$;
- f est continue à gauche en a si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemple

Proposition 36 (*opérations sur les fonctions continues*)

Soit f, g des fonctions définies et continues sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) λf et $|f|$ sont continues sur I ;

(ii) $f + g$ est continue sur I ;

(iii) $f \times g$ est continue sur I ;

(iv) si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Démonstration : Soit f, g des fonctions définies et continues sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in I$. f et g admettent donc pour limite respectivement $f(a)$ et $g(a)$ en a. Par opérations sur les limites, on a directement le fait que λf, $|f|$, $f + g$, $f \times g$ admettent des limites en a et :

$$\lim_{x\to a} \lambda\, f(x) = \lambda f(a), \quad \lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|, \quad \lim_{x\to a} f(x)+g(x) = f(a)+g(a), \quad \lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = f(a)\, g(a).$$

Ceci étant vrai en tout point a de I ceci démontre (i), (ii), (iii). On obtient le (iv) par le même raisonnement lorsque $g(a) \neq 0$. □

2 Prolongement par continuité

Définition 37

Soit f une fonction définie et continue sur $I \setminus \{a\}$ admettant une limite en a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On peut alors construire une nouvelle fonction $\tilde{f}$ qui prolonge f en posant :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \text{ pour } x \in I \setminus \{a\} \\ \tilde{f}(a) = \ell \end{cases}$$

Ainsi définie, $\tilde{f}$ est continue sur I et elle sera appelée **le prolongement par continuité** de f sur I.

Remarque

Exemple

Montrons que la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$.

3 Image d'un intervalle par une fonction continue

3.1 Image, minimum, maximum

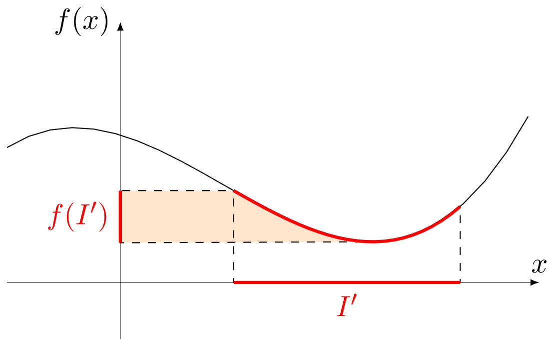
Définition 38

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $I' \subset I$. On note $f(I')$ l'ensemble

$$f(I') = \left\{ f(x) \mid x \in I' \right\}.$$

En particulier, $f(I)$ est l'**image de** f.

Figure 39 (*Image d'un intervalle*)



Définition 40

Soit f une fonction définie sur I. On dit que f admet un

(*i*) **maximum** en a sur I s'il existe $a \in I$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$: $f(a) = \max\limits_{x \in I} f(x)$;

(*ii*) **minimum** en a sur I s'il existe $a \in I$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$: $f(a) = \min\limits_{x \in I} f(x)$.

Exemple

Remarque

Définition 41

Soit f une fonction définie sur I. On dit que f admet un

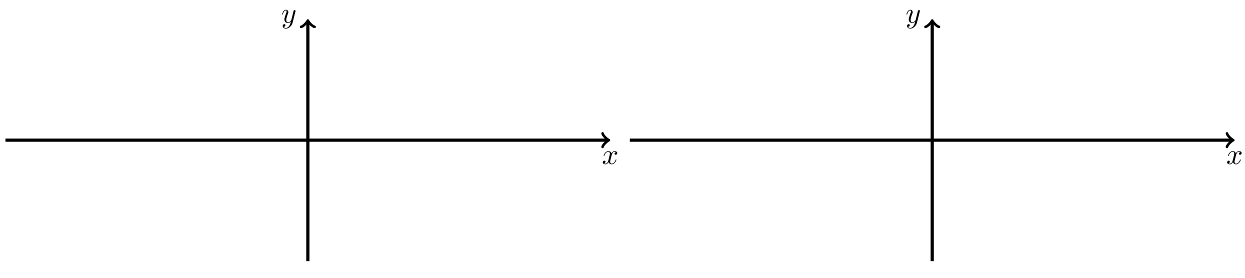
(i) **maximum local** en a s'il existe un voisinage de a sur lequel $f(a)$ est un maximum, c'est à dire : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(a);$$

(ii) **minimum local** en a s'il existe un voisinage de a sur lequel $f(a)$ est un maximum, c'est à dire : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$:

$$|x - a| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(a).$$

Figure 42 (*Minimum global ou local*)

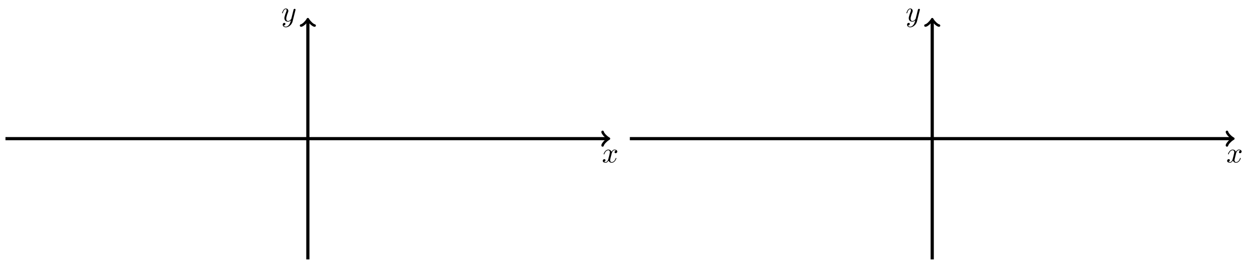


3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 43 (*des valeurs intermédiaires*)

Soit f une fonction **définie et continue sur un intervalle** $[a, b]$ avec $a < b$. Pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Figure 44 (***Importance de la continuité dans le théorème des valeurs intermédiaires***)



Démonstration :

□

Corollaire 45 (*des valeurs intermédiaires*)

Soit f une fonction **définie et continue sur un intervalle** I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration : On va utiliser le théorème du chapitre 8 : une partie non vide A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $\alpha, \beta \in A$, $[\alpha, \beta] \subset A$. On va utiliser ce théorème avec $A = f(I)$.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Montrons que $f(I)$ est un intervalle. Soit $\alpha, \beta \in f(I)$. Par définition, il existe $a, b \in I$ tel que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Montrons que $[\alpha, \beta] \subset f(I)$. Soit $y \in [\alpha, \beta] = [f(a), f(b)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$ donc $y \in f(I)$.

Par suite, pour tout $y \in [\alpha, \beta]$, $y \in f(I)$ donc $[\alpha, \beta] \subset f(I)$. Ainsi, pour tous $\alpha, \beta \in f(I)$, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.

En conclusion, par le théorème rappelé en début de démonstration, $f(I)$ est un intervalle. □

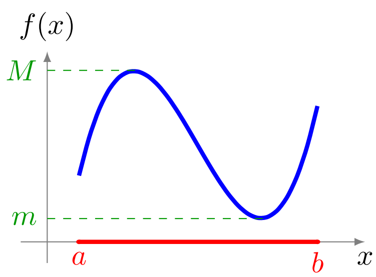
Remarque

Théorème 46 (*Image continue d'un segment*)

Une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes. Ceci signifie que qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f([a,b]) = [m, M] \text{ avec } m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Figure 47 (*Image continue d'un segment*)



La démonstration de ce théorème est hors programme.

Remarque

Exemple

3.3 Théorème de la bijection

Définition 48 (*Bijection*)

On dit que f est une bijection de I sur J si pour tout $y \in J$ **il existe un unique** $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

Définition 49 (*Application réciproque*)

Si f est une bijection de I dans J, on définit son application réciproque f^{-1} comme l'unique application vérifiant pour tout $x \in I$, $y \in J$:

$$y = f(x) \quad \iff x = f^{-1}(y).$$

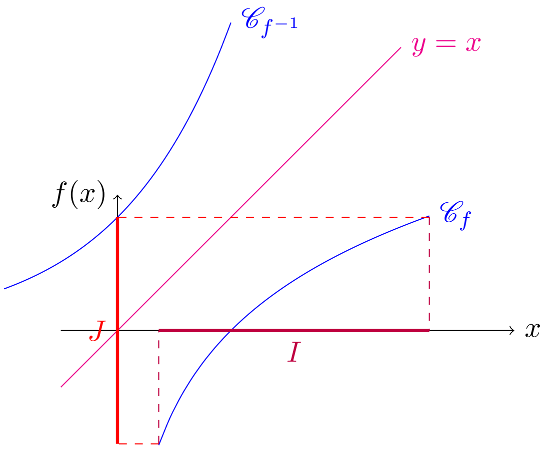
Théorème 50 (*de la bijection*)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

(i) Alors, $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur J.

(ii) Elle admet donc une bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ qui est continue et de même sens de variations que f.

Figure 51



Remarque

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, un point P de coordonnées (x, y) appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$. Ainsi, comme $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$, P appartient à la courbe si seulement si P de coordonnées (y, x) appartient à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$. Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration :

$\square$

Exemple

Ce théorème nous permet de prouver l'existence et l'unicité d'objets mathématiques : par exemple, c'est comme cela qu'on construit les fonctions réciproques suivantes :

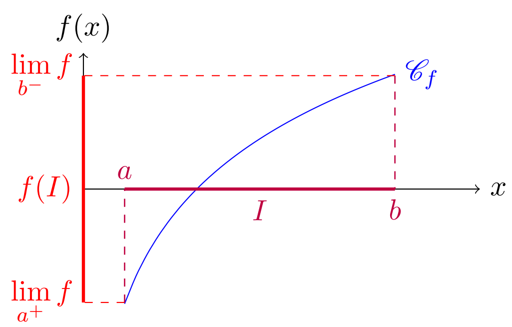
I	f	$f(I)$	f^{-1}
$[0,+\infty[$	$x \mapsto x^n$	$[0,+\infty[$	$y \mapsto y^{1/n}$
$]0,+\infty[$	$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}$	$y \mapsto \exp(y)$
$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$x \mapsto \sin(x)$	$[-1,1]$	$y \mapsto \arcsin(y)$
$[0,\pi]$	$x \mapsto \cos(x)$	$[-1,1]$	$y \mapsto \arccos(y)$
$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R}$	$y \mapsto \arctan(y)$

Proposition 52

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I. Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. On suppose que f admet des limites en a^+ et en b^-. On a le tableau suivant :

conditions sur a, b	$I =$	$f(I) =$
$a, b \in \mathbb{R}$	$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$
$a \in \mathbb{R},\, b \in \overline{\mathbb{R}}$	$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$
$a \in \overline{\mathbb{R}},\, b \in \mathbb{R}$	$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$
$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$	$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$

Figure 53



Démonstration :

$\square$

IV Dérivabilité

Dans toute cette partie I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

1 Définitions et caractérisation

Définition 54 (*Dérivabilité*)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.

- On dit que f est **dérivable en** a si le **taux d'accroissement au point** a admet une limite finie, c'est à dire si :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe et est finie.}$$

  Dans ce cas, la limite sera notée $f'(a)$ et elle sera appelée la **dérivée de** f **en** a**.**
- On dit alors que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point de I.

Exemple

Définition 55

Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle I et au voisinage de a. On dit que f **est négligeable devant** g **au voisinage de** a et on note :

$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$$

si il existe une fonction e définie sur I qui vérifie, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = g(x)\, e(x)$$

et qui admet pour limite 0 en a :

$$\lim_{x \to a} e(x) = 0.$$

Remarque

Définition 56 (*Développement limité à l'ordre 1*)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) - f(a) - \ell \times (x - a) = \underset{x \to a}{o}(x - a).$$

Proposition 57

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. Alors, f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a.

Dans ce cas : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$.

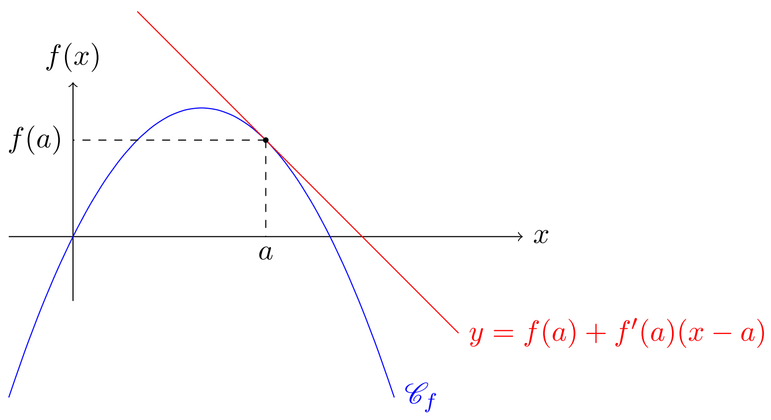
Démonstration :

$\square$

Remarque

Exemple

Figure 58 (*Tangente en a*)



Définition 59 (*Dérivée à droite, dérivée à gauche*)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.

(i) On dit que f est **dérivable à droite en** a si le **taux d'accroissement au point** a admet une limite à droite finie, c'est à dire si :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe et est finie,}$$

et cette limite sera notée $f'_d(a)$.

(ii) On dit que f est **dérivable à gauche en** a si le **taux d'accroissement au point** a admet une limite à gauche finie, c'est à dire si :

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe et est finie,}$$

et cette limite sera notée $f'_g(a)$.

Exemple

Proposition 60 (*Caractérisation à l'aide des dérivées à droite et à gauche*)

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.

$$\text{Alors, } f \text{ est dérivable en } a \text{ si et seulement si } \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

Et dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration : Le taux d'accroissement admet une limite en a si et seulement si il admet des limites à droite et à gauche en a à droite et à gauche ce qui donne l'équivalence demandée. □

Exemple

Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+ \\ -x^2 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Théorème 61

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration :

$\square$

Remarque

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Définition 62

Soit f une fonction définie et dérivable sur I. On appelle alors **fonction dérivée de** f la fonction notée f' et définie par :

$$f' : a \in I \mapsto f'(a).$$

Proposition 63 (*Opérations sur les dérivées*)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g deux fonctions définies et dérivables sur I. Alors :

(i) $f+g$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I,\ (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

(ii) $\lambda.f$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I,\ (\lambda.f)'(a) = \lambda f'(a)$;

(iii) fg est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I,\ (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

(iv) si de plus, pour tout $a \in I,\ g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et pour tout $a \in I$,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2};$$

(v) si de plus, pour tout $a \in I,\ g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration :

$\square$

Théorème 64 (*Dérivée d'une fonction composée*)

Soit f une fonction définie et dérivable sur I et g une fonction définie et dérivable sur J avec $f(I) \subset J$. Alors, la fonction composée $g \circ f$ est encore dérivable sur I et pour tout $a \in I$,

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) \times f'(a).$$

Démonstration :

Soit $a \in I$. Comme f est dérivable en a, elle admet un développement limité en a : il existe une fonction e_1 définie sur I, qui admet pour limite 0 en a telle que, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,e_1(x).$$

Si $b \in J$, comme g est dérivable en b, elle admet un développement limité en b : il existe une fonction e_2 définie sur J, qui admet pour limite 0 en b telle que, pour tout $y \in J$:

$$g(y) = g(b) + g'(b)\,(y-b) + (y-b)\,e_2(y).$$

En particulier pour $b = f(a)$ et $y = f(x) \in J$, on a, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))\,(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\,e_2(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))\,(f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,e_1(x)) + (f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,e_1(x))\,e_2(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))\,f'(a)\,(x-a) + (x-a)\big(g'(f(a))\,e_1(x) + (f'(a) + e_1(x))\,e_2(f(x))\big) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))\,f'(a)\,(x-a) + (x-a)\,e(x) \end{aligned}$$

où $e(x) = g'(f(a))\,e_1(x) + (f'(a) + e_1(x))\,e_2(f(x))$. Par opérations sur les limites, il apparaît que e admet pour limite 0 en a. En conclusion, $g \circ f$ admet un développement limité en a donc $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\,f'(a).$$

$\square$

Théorème 65 (*dérivée de la bijection réciproque*)

Soit f une fonction définie et dérivable sur I strictement monotone sur I. Alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$, f^{-1} est continue et si pour tout $a \in I$, $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $b \in J$,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

Démonstration :

$\square$

Grâce à ces opérations sur les dérivées, on obtient toutes les dérivées usuelles :

On considère f définie par $f(x) = ...$	alors f est dérivable sur $I = ...$	et pour tout $x \in I$, $f'(x) = ...$:
x^α $(x > 0)$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln\lvert x\rvert$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$ $(x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\})$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\mathrm{sh}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\arcsin(x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$	$]-1, 1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$ $(x \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Remarque

Toutes les fonctions sont continues également sur leur ensemble de dérivabilité mais ne peuvent se prolonger par continuité sur un intervalle plus grand à l'exception de $x \mapsto x^\alpha$ qui est prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$.

On retrouve également le tableau des dérivées composées usuelles qui est une conséquence directe du tableau précédent et du théorème 11 : si u est une **fonction** dérivable sur I.

Fonction	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
u^n, $n \in \mathbb{N}^*$	I	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	lorsque u ne s'annule pas	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	lorsque $u > 0$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	I	$(e^u)' = u'e^u$
$\ln u$	lorsque $u > 0$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$\cos u$	I	$(\cos u)' = -u' \sin u$
$\sin u$	I	$(\sin u)' = u' \cos u$

3 Dérivées successives

Définition 66

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I. On pose $f^{(0)} = f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence, si $f^{(n)}$ est dérivable, sa dérivée $(n+1)$-ième par

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Lorsque $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I.

Remarque

Comme pour la dérivée, la dérivée n-ième pourra être notée

$$x \mapsto \frac{d^n}{dx^n}\big(f(x)\big)$$

Remarque

Proposition 67 (*Calcul des dérivées successives*)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g définie et n fois dérivables sur I. Alors :

(i) $\lambda.f + g$ est n fois dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(\lambda.f + g)^{(n)}(x) = \lambda.f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

(ii) fg est n fois dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad \text{(formule de Leibniz)}$$

Démonstration : Pour le (i) et le (ii), on va procéder par récurrence.

(i) Pour $n = 0$, par définition, $f+g$ est « 0 fois » dérivable sur I et, sur I : $(\lambda.f+g)^{(0)} = \lambda.f^{(0)}+g^{(0)}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n : si f et g sont n fois dérivables sur I, alors $\lambda.f + g$ est n fois dérivables sur I et, sur I :$(\lambda.f + g)^{(n)} = \lambda.f^{(n)} + g^{(n)}$.
Supposons que f et g sont $n+1$ fois dérivables. En particulier, f et g sont n fois dérivable sur I et vérifient donc l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont dérivables une fois sur I donc $(\lambda.f + g)^{(n)}$ est dérivable sur I et par dérivation de la somme :

$$(\lambda.f + g)^{(n+1)} = \left(\lambda.f^{(n)} + g^{(n)}\right)' = \lambda.f^{(n)'} + g^{(n)'} = \lambda.f^{(n+1)} + g^{(n+1)}$$

ce qui achève la récurrence.

(ii) Pour $n = 0$, sur I :

$$(f\,g)^{(0)} = f\,g = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n : si f et g sont n fois dérivables sur I, alors $f\,g$ est n fois dérivables sur I et, sur I :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}.$$

On suppose que f et g sont $n+1$ fois dérivables sur I. En particulier, f et g sont n fois dérivables sur I et vérifient donc l'hypothèse de récurrence.

On sait que $\binom{n}{n} = \quad = \qquad , \binom{n}{0} = \quad = \qquad$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \qquad .$$

Par hypothèse de récurrence, $(f\,g)^{(n)}$ est dérivable une fois et, sur I :

$$(f\,g)^{(n+1)} = (f\,g)^{(n)\prime} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}\right)'$$

$\square$

Exemple

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \mapsto \dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

Définition 68

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie sur I. On dit que

- f est de **classe $\mathscr{C}^0$ sur** I si f est continue sur I ;
- f est de **classe $\mathscr{C}^n$ sur** I si elle admet une dérivée n-ième **continue** $f^{(n)}$ sur I ;
- f est **indéfiniment dérivable** ou de **classe $\mathscr{C}^\infty$ sur** I si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 69

Soit $n \in \mathbb{N}$. La somme, le produit, le quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas sur I de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

Démonstration : La démonstration est une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ à l'aide des opérations sur les fonctions dérivables et les fonctions continues. □

Remarque

Exemple

Montrons que la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée en 0 par $\varphi(0) = 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4 Fonctions à valeurs complexes

Définition 70

Une **fonction f d'une variable réelle à valeurs complexes** est une application qui à tout élément $x \in \mathscr{D}(f) \subset \mathbb{R}$ associe au plus une image dans $\mathbb{C}$.

Dans la suite, si f est une fonction à valeurs complexes, on le précisera. Si cela n'est pas précisé, f est à valeurs réelles.

Définition 71

Si f est une fonction définie sur I et à valeurs complexes, on définit la fonctions **partie réelle de f** et **partie imaginaire de f** par, pour tout $x \in I$:

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}\big(f(x)\big) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}\big(f(x)\big).$$

On peut étendre les définitions de limite **finie** en un point ou à l'infini mais on prendra garde à la remarque suivante :

Remarque

Proposition 72

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs complexes.

(i) f admet une limite finie dans $\mathbb{C}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des limites **finies** en a et :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \mathrm{Re}(f)(x) + i \lim_{x \to a} \mathrm{Im}(f)(x);$$

(ii) f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I ;

(iii) f est dérivable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur I et, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + i\,\mathrm{Im}(f)'(x).$$

Démonstration : Les démonstrations sont uniquement une application des définitions et l'utilisation de l'inégalité triangulaire. □

Proposition 73

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\alpha x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \alpha\, e^{\alpha x}.$$

Démonstration :

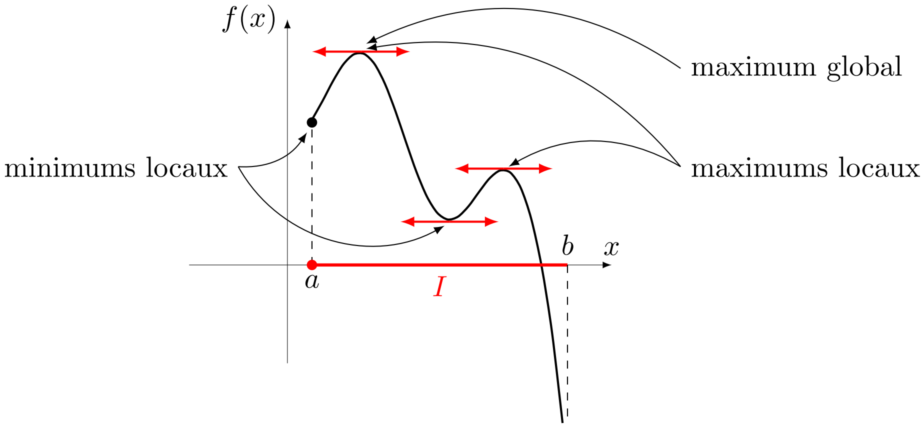
□

5 Théorème de Rolle et accroissements finis

Proposition 74 (*Condition nécessaire d'extremum*)

Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$, $a < b$. Si f admet un extremum local en un point $c \in I$ en lequel elle est dérivable alors $f'(c) = 0$.

Figure 75 (*Condition nécessaire d'extremum*)



Remarque

Démonstration :

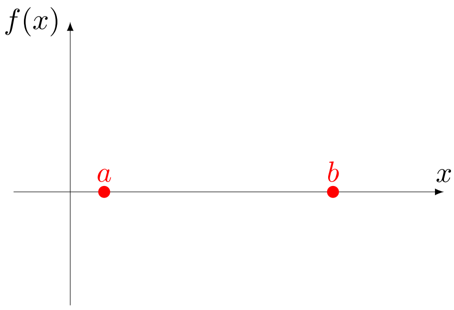
□

Théorème 76 (*Théorème de Rolle*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Figure 77



Interprétation graphique et cinématique :

Démonstration :

$\square$

Exemple

Soit P un polynôme. Montrons qu'entre deux racines réelles distinctes de P, il existe une racine de P'.

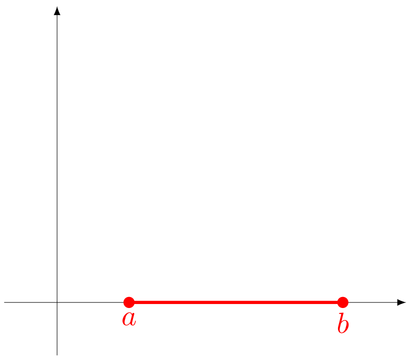
Remarque

Théorème 78 (*Égalité des accroissements finis*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Figure 79 (*Égalité des accroissements finis*)



Interprétation graphique et cinématique :

Démonstration :

□

Définition 80

Soit $M \in \mathbb{R}^+$ et f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est lipschitzienne de rapport M si, pour tout $x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Remarque

Proposition 81 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$. On suppose que f' est bornée sur $]a, b[$ c'est-à-dire il existe $M \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x \in]a, b[$:

$$|f'(x)| \leq M.$$

Alors f est lipschitzienne de rapport M sur $[a, b]$: pour tous $x, y \in [a, b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Démonstration :

□

6 Prolongement de la dérivée

Théorème 82 (*Théorème de limite de la dérivée*)

Soit f une fonction définie et continue sur I et $a \in I$. On suppose que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a,

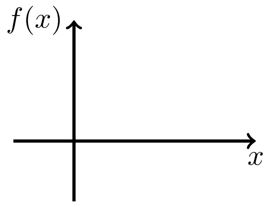
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{admet pour limite } \ell \text{ lorsque } x \text{ tend vers } a$$

et dans ce cas, on a l'alternative :

(i) si $\ell \in \mathbb{R}$ alors

(ii) si $\ell = \pm\infty$ alors

Figure 83 (*Exemple de tangente verticale*)



Remarque

Démonstration :

$\square$

Exemple

Montrons que la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{-1}{|x|}}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, et admet un prolongement continu et dérivable sur $\mathbb{R}$.

V Applications

1 Caractérisation des fonctions monotones

Théorème 84 (*caractérisation de la monotonie*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a, b[$.

(i) f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$;

(ii) f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$;

(iii) f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$.

Remarque

Démonstration :

$\square$

En adaptant la démonstration précédente, on obtient :

Corollaire 85

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a, b[$.

(i) si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante ;

(ii) si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.

Remarque

Théorème 86

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur I.

(i) si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et que f' s'annule en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I ;

(ii) si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ et que f' s'annule en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration :

$\square$

2 Notion de point fixe

Définition 87

Soit f une fonction définie sur I. On appelle **point fixe** de f tout réel $c \in I$ vérifiant :

$$f(c) = c.$$

On donne un exemple de fonction avec un point fixe et la manière de l'atteindre :

Exemple

On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \pi + \dfrac{1}{3}\sin(x)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers un point fixe de f et que ce point fixe est unique.