Chapitre 12 : Analyse asymptotique des fonctions

I Relations de comparaison

1 Notations de Landau

Définition 1

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose qu'il existe une fonction e définie au voisinage de a tel que pour x au voisinage de a :

$$f(x) = g(x)\, e(x).$$

On dit que :

1. f **est dominée par** g au voisinage de a si e est bornée au voisinage de a et on note :
$$f(x) \underset{x \to a}{=} O\big(g(x)\big);$$
2. f **est négligeable devant** g au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} e(x) = 0$ et on note :
$$f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big);$$
3. f **est équivalente à** g au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} e(x) = 1$ et on note :
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x).$$

Remarque

Proposition 2

On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de $a \in \mathbb{R}$. On a :

1. $f(x) \underset{x \to a}{=} O\big(g(x)\big) \iff \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a;
2. $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big) \iff \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0;$
3. $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Remarque

Démonstration :

Exemple

Montrons que

1. $\sin x \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$;
2. $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$;
3. $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(x\big)$;
4. $x^{n+1} - 1 \underset{x\to 1}{\sim} n(x-1)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

2 Résultats sur les fonctions usuelles

2.1 Croissances comparées

Théorème 3

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta > 0$. On a :

(i) $\ln(x)^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta)$;

(ii) $|\ln x|^\alpha = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$;

(iii) $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\beta x})$.

Ce théorème a déjà été démontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles.

Dessin récapitulatif :

Remarque

2.2 Fonctions dérivables

Proposition 4

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable en a si et seulement il existe $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$$

et dans ce cas $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

Ce théorème sera démontré dans le chapitre sur la dérivabilité.

Remarque

Proposition 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On a les équivalents :

1. $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
2. $\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
3. $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
4. $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$;
5. $\arcsin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
6. $\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;
7. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha\, x$;
8. $1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Démonstration :

Exemple

Déterminons la limite en 1 de

$$f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

2.3 Polynômes

Proposition 6

On considère la fonction polynomiale :

$$P : x \mapsto a_d\, x^d + \cdots + a_n\, x^n$$

où $d \leq n$ sont des entiers naturels et $a_d, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_d \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On a :

(i) $P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_d\, x^d$ (monôme de plus bas degré) ;

(ii) $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n\, x^n$ (monôme de plus haut degré).

Démonstration :

3 Opérations sur les équivalents

Comme pour les suites, on peut faire des produits d'équivalents et changer de variable dans un équivalent.

Exemple

Déterminons un équivalent simple de

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 8x}$$

en 0 et en $-\infty$.

En revanche, on ne peut pas faire de somme mais on retiendra :

Théorème 7

On a :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \text{ si et seulement si } f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o\big(g(x)\big).$$

Exemple

Déterminer un équivalent de la fonction f au point considéré :

1. $f(x) = \ln(\cos x)$ en 0 ;
2. $f(x) = \dfrac{\tan x\, \ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2} - 1}$ en 0 ;
3. $f(x) = \dfrac{\big(\ln(\ln x)\big)^2 + \ln x}{2^x - 50\, x^6}$ en $+\infty$;
4. $f(x) = \dfrac{\ln(x\sqrt{x^2+1})}{\ln x}$ en $+\infty$;

4 Utilisation des équivalents

Les équivalents permettent de déterminer des signes et des limites.

Proposition 8

On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

1. Les fonctions f et g sont de même signe au voisinage de a.
2. La fonction f admet une limite en a si et seulement si g admet une limite en a et dans ce cas :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Démonstration :

On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Il existe une fonction e définie au voisinage de a tel que

$$f(x) = g(x)e(x) \quad \text{et} \quad e(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1.$$

1. Comme $1 > 0$, la fonction e est strictement positive au voisinage de a donc f et g sont de même signe au voisinage de a.
2. Si g admet une limite ℓ en a, comme e tend vers 1 en a, par opération sur les limites, f tend vers ℓ en a. De même, comme e ne s'annule pas au voisinage de a, on a, au voisinage de a, $g = \frac{f}{e}$ donc, si f tend vers ℓ en a, par opération sur les limites, g tend aussi vers ℓ en a. En conclusion, la fonction f admet une limite en a si et seulement si g admet une limite en a et dans ce cas :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Exemple

Déterminer la limite de la fonction f au point considéré :

1. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$;
2. $f : x \mapsto \ln x \ln(x-1)$ en 1^- ;
3. $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ en 0^+ ;
4. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + \ln x}{\ln(x + x^2)}$;
5. $f : x \mapsto \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\ln x}$ en $+\infty$.

On peut également trouver des équivalents de suites à l'aide d'équivalents de fonction :

Exemple

Déterminons un équivalent de la suite (u_n) donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)$.

II Développements limités

1 Définition et premières propriétés

Définition 9

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a si f est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et s'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que :

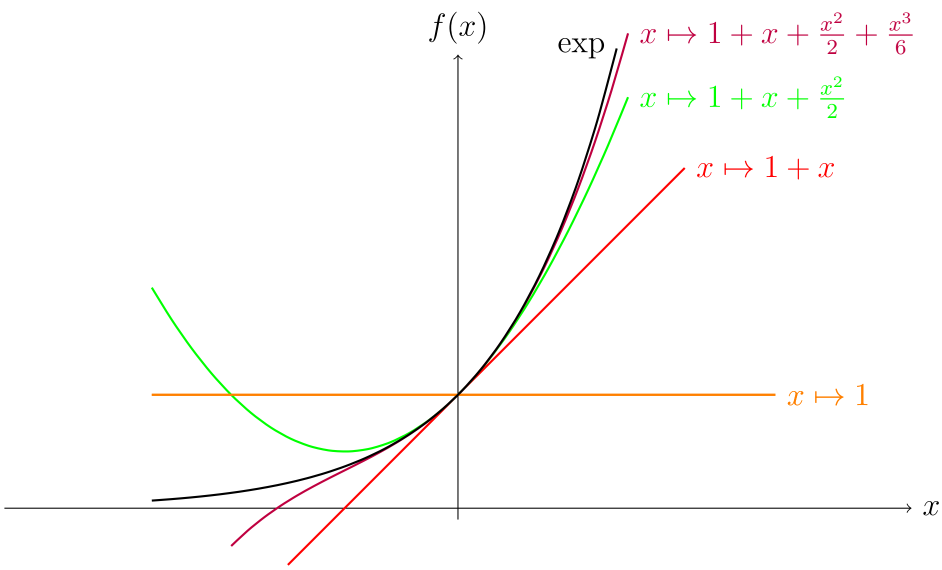
$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} P_n(x-a) + o\big((x-a)^n\big) \\ &\underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big) \end{aligned}$$

où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Le polynôme P_n est appelé la partie régulière du développement limité et n l'ordre du développement limité.

Remarque

Exemple de développement limité en 0 avec la fonction $\exp$

On démontre dans la suite : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$



On constate que plus l'ordre du développement limité est grand, plus l'approximation de la fonction au voisinage de 0 est bonne.

Exemple

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

Proposition 10

Si une fonction f admet un développement limité à l'ordre n, alors sa partie régulière est unique.

Démonstration :

Corollaire 11

Soit f une fonction admettant un développement limité en 0. Si f est paire (resp. impaire), la partie régulière du développement limité en 0 ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration :

On démontre le théorème pour une fonction paire. Soit f une fonction paire définie sur un intervalle I (symétrique par rapport à 0) admettant un développement limité à l'ordre $\in \mathbb{N}$ en 0. On a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + o\big(x^n\big).$$

De même, on a

$$f(x) = f(-x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, (-x)^n + o\big(x^n\big)$$

donc, par unicité de la partie régulière d'un développement limité, on a, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'égalité $a_k = (-1)^k a_k$ qui donne, lorsque k est impair, $a_k = 0$. Par suite, le développement limité de f ne comporte que des puissances paires.

2 Formule de Taylor-Young

Théorème 12 (*Formule de Taylor-Young*)

Formule de Taylor-Young. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, f admet un développement limité en a et

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

Cette formule est démontrée dans un autre chapitre de l'année.

Remarque

Exemple

Calculons le développement limité de la fonction tan en 0 à l'ordre 3.

3 Changement de variable

Proposition 13

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f satisfait le développement limité

$$f(y) \underset{y\to a}{=} a_0 + a_1(y-a) + a_2(y-a)^2 + \cdots + a_n(y-a)^n + o\big((y-a)^n\big)$$

où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et que u est une fonction vérifiant $u(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} a$, alors

$$f(u(x)) \underset{x\to b}{=} a_0 + a_1(u(x)-a) + a_2(u(x)-a)^2 + \cdots + a_n(u(x)-a)^n + o\big((u(x)-a)^n\big).$$

On fait le changement de variable $y = u(x)$.

Démonstration : Le résultat vient du théorème de composition des limites.

Remarque

Exemple

Écrivons le développement limité de $x \mapsto \sin(x^{12})$ en 0 à l'ordre 36.

Dans la suite, on écrira uniquement des développement limités en 0. En effet, avec le changement de variable $h = x - a$, on peut écrire un développement limité en a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

sous la forme

$$f(a+h) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1\,h + a_2\,h^2 + \cdots + a_n\,h^n + o\big(h^n\big)$$

Exemple

Écrivons le développement limité de exp en 1 à l'ordre 5.

4 Développements limités usuels

Proposition 14 (*Développements limités usuels*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\displaystyle \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\,;$
2. $\displaystyle e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)\,;$
3. $\displaystyle \sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})\,;$
4. $\displaystyle \cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})\,;$
5. $\displaystyle \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\,x^k}{k} + o(x^n) \quad (n \geq 1)\,;$
6. $$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha\,x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)\,;\end{aligned}$$
7. $\displaystyle \tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,;$
8. $\displaystyle \arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$

Démonstration :
Le 1 a déjà été démontré, on montre le 2, le 3 et le 6. Le 7 a déjà été démontré et les 5 et 8 sont démontrés plus bas.

Remarque

On ne retiendra pas par coeur ces développements limités mais seulement la façon de les obtenir.

III Calculs avec des développements limités

1 Somme et produit

On note, si R est un polynome et n un entier naturel,

$$\mathrm{Tronc}_n(R)$$

le polynôme R où toutes les puissances strictement supérieures à n ont été supprimées.

Proposition 15

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g des fonctions admettant des D.L. en 0 à l'ordre n :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o\big(x^n\big) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q_n(x) + o\big(x^n\big)$$

où P_n, Q_n sont des polynômes. Les fonctions $\lambda\, f + \mu\, g$ et $f\, g$ admettent des D.L. en 0 à l'ordre n et

(i) $\lambda\, f(x) + \mu\, g(x) \underset{x\to 0}{=} \lambda\, P_n(x) + \mu\, Q_n(x) + o\big(x^n\big)$

(ii) $f(x)\, g(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Tronc}_n(P \times Q)(x) + o\big(x^n\big)$.

Démonstration : Cette proposition vient des propriétés des limites écrites avec la notation o.

Exemple

Écrivons le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \sin(x)\,\mathrm{ch}(x).$$

2 Composition

Proposition 16

Soit f, g des fonctions admettant des D.L. en 0 à l'ordre n :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o\big(x^n\big) \quad \text{et} \quad g(y) \underset{y\to 0}{=} Q_n(y) + o\big(y^n\big)$$

où P_n, Q_n sont des polynômes. **On suppose que** $f(0) = 0$**.** La fonction $g \circ f$ admet un D.L. en 0 à l'ordre n donné par

$$g\big(f(x)\big) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{Tronc}_n\Big(Q_n\big(P_n(x)\big)\Big) + o\big(x^n\big).$$

Démonstration : Ce théorème vient du théorème de changement de variable dans les o.

Remarque

Il est très important de vérifier que $f(0) = 0$ puis de tronquer le D.L..

Exemple

Déterminer des développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions

$$h_1 : x \mapsto e^{\cos x}, \quad h_2 : x \mapsto (1+x)^x \quad \text{et} \quad h_3 : x \mapsto \sqrt{1 + \sin x}$$

Exemple

Déterminer la limite éventuelle de $\dfrac{e^{\sin x} - e^{x}}{\sin x - \tan x}$ lorsque x tend vers 0.

Remarque

3 Inverse d'un développement limité

On ne pas donne ici de théorème mais seulement une méthode pour calculer un D.L. d'un inverse qui utilise le D.L. en 0 de $\varphi\colon y \mapsto \frac{1}{1-y}$. En fait, ceci utilise le théorème de composition car, si f est définie sur I et ne s'annule pas, pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1-\big(1-f(x)\big)} = \varphi\big(1-f(x)\big).$$

Exemple

Déterminons le D.L. à l'ordre 3 en 0 de la fonction $\frac{1}{\cos}$.

4 Intégration d'un développement limité

Proposition 17

Soit f une fonction continue en 0 et admettant un D.L. en 0 à l'ordre n :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P_n(x) + o\big(x^n\big)$$

où P_n est un polynôme. Si F désigne une primitive de f au voisinage de 0, F admet un D.L. au voisinage de 0 à l'ordre $n+1$ et :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \int_0^x P_n(t)\ \mathrm{d}t + o\big(x^{n+1}\big).$$

Ce résultat se démontre avec la formule de Taylor avec reste intégral.

Exemple

Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

Exemple

Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \arctan x.$$

IV Applications

1 Étude locale de fonctions

Les développements limités permettent de justifier plus facilement des continuités de fonctions ainsi qu'étudier des dérivabilités. On pourra aussi déterminer la position de la courbe de f au voisinage d'une de ses tangentes.

Exemple

On considère la fonction f, définie par $f(0) = \frac{1}{2}$ et pour $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}.$$

Montrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ (on donnera la valeur de $f'(0)$). Déterminer également la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

2 Asymptotes

On pourra aussi utiliser les développements limités pour déterminer des asymptotes à des courbes. On parlera alors de développement asymptotique.

Exemple

On considère la fonction g définie, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$g(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x-1}.$$

Montrer que g admet un développement limité au voisinage de $+\infty$ et montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on donnera l'équation et la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport à cette asymptote.