Chapitre 10 : Matrices et systèmes linéaires

I Matrices

Dans tout le chapitre $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$.

1 Définitions

Définition 1

On appelle **matrice à** n **lignes et** p **colonnes** un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{R}$. Si A est une matrice à n lignes et p colonnes, on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, $a_{i,j}$ est le **coefficient de la matrice** A à la ligne i et à la colonne j.

Définition 2

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

ou $A = (a_{i,j})$ lorsque qu'il n'y pas d'ambiguïté sur n et p.

Exemple 3

Remarque 4

2 Matrices particulières

Définition 5

On appelle :

(i) **matrice nulle**, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des 0 et on la note $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$, $0_{n,p}$ ou 0 ;

(ii) **matrice colonne** toute matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

(iii) **matrice ligne** toute matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 6

Remarque 7

3 Matrices carrées

Définition 8

Lorsque $n = p$, tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelé **matrice carrée d'ordre** n. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 9

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les éléments $a_{i,i}$ sont appelés **coefficients diagonaux** de A.

(ii) Lorsque tous les coefficients non diagonaux de A sont nuls, on dit que A est une **matrice diagonale**. De manière précise A est diagonale lorsque :

(iii) La matrice diagonale n'ayant que des 1 sur la diagonale est la **matrice identité** et est notée I_n.

(iv) Lorsque seuls les coefficients en-dessous (respectivement au-dessus) de la diagonale de A sont nuls : on dit que A est **une matrice triangulaire supérieure** (respectivement **triangulaire inférieure**). De manière précise A est triangulaire lorsque :

Remarque 10

Exemple 11

4 Opérations sur les matrices

Définition 12

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit la somme des deux matrices A et B et le produit d'une matrice par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par :

$$A + B = (a_{i,\,j} + b_{i,\,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \quad \text{et} \quad \lambda\, A = (\lambda\, a_{i,\,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}.$$

Remarque 13

Proposition 14

Soit $A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :

(i) $A + B = B + A$;

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(iii) $A + 0_{n,p} = A$;

(iv) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

(v) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

(vi) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Remarque 15

Démonstration :

Exemple 16

Définition 17

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle opposé de A, la matrice $-1\, A = -A$ et on a : $-A + A = A - A = 0_{n,p}$.

Proposition 18

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p(\mathbb{R})}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

Démonstration :

Définition 19

On appelle base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la famille de matrice $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ où pour tous $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$, $E_{i,j}$ est composée uniquement de 0 sauf en ligne i et à la colonne j où le coefficient vaut 1.

Dessin des matrices $E_{i,j}$:

Proposition 20

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}.$$

Démonstration :

Remarque 21

5 Produit de deux matrices

Définition 22

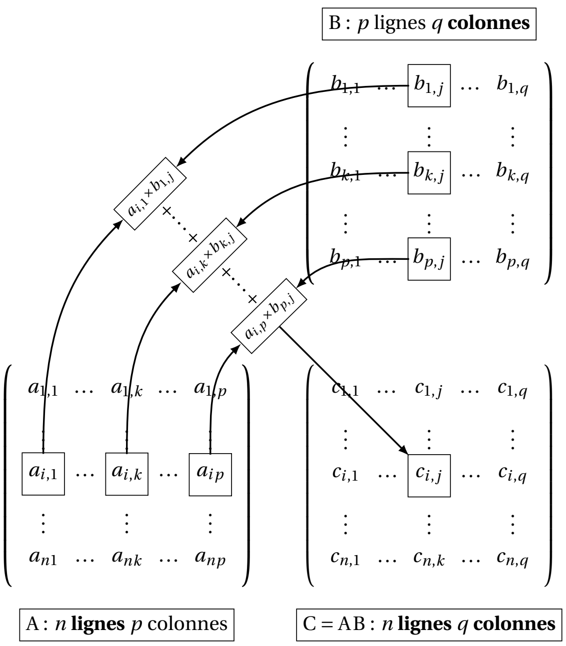
Soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit la matrice $C=(c_{i,j})\in\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, appelée produit de la matrice A par B, la matrice vérifiant

$$c_{i,\,j}=\sum_{k=1}^{q}a_{i,\,k}\,b_{k,\,j}$$

qu'on note

$$C=A\times B \text{ ou } C=AB.$$

Écriture pratique :



Exemple 23

Remarque 24

Exemple 25

Pour tous $i \in [\![1, n]\!]$, $j, k \in [\![1, p]\!]$, $\ell \in [\![1, q]\!]$, montrons que

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = E_{i,\ell} \text{ si } j = k \text{ et } 0_{n,q} \text{ sinon.}$$

Proposition 26

Pour toutes matrices A, B, C telles que les produits sont bien définis :

(i) $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$;

(ii) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$;

(iii) $I_n A = A = AI_p$;

(iv) $(AB)C = A(BC)$.

Remarque 27

Démonstration :

Proposition 28

Le produit de deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) est diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure).

Démonstration :

Remarque 29

6 Puissances d'une matrice carrée

Définition 30

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit par récurrence :

$$A^{k+1} = A^k A = A A^k.$$

Exemple 31

Remarque 32

Proposition 33

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k, \ell \in \mathbb{N}$ On a :

(i) $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;

(ii) $(A^k)^\ell = A^{k\,\ell}$;

(iii) $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.

Démonstration :

Théorème 34 (*Formule du binôme de Newton*)

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si

$$AB = BA$$

alors, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k\, B^{n-k}$$

Remarque 35

Éléments de démonstration.

Exemple 36

Calculer, $n \in \mathbb{N}$, A^n où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 Transposition

Définition 37

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle matrice **transposée** de A la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$A^{\mathrm{T}} = (a_{j,i}).$$

Exemple 38

Définition 39

Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

(i) $(\lambda A + B)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

(ii) $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$.

Démonstration :

Proposition 40

Pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a :

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.$$

Démonstration :

Définition 41

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que

1. A est **symétrique** si $A^{\mathrm{T}} = A$;
2. A est **antisymétrique** si $A^{\mathrm{T}} = -A$.

Exemple 42

Proposition 43

Toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration :

II Systèmes linéaires

1 Définitions

Définition 44

On appelle **système d'équations linéaires**, tout système de la forme :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où

- pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, les nombres $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ sont appelés les **coefficients** du système ;
- le n-uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système ;
- pour $j \in [\![1, p]\!]$, les $x_j \in \mathbb{R}$ sont appelées les **inconnues** du système ;
- pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'équation $a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,p}\,x_p = b_i$ est appelée **ligne numéro** i du système et sera notée L_i.

On dit en particulier que (S) est un **système de** n **équations à** p **inconnues**.

Exemple 45

Remarque 46

Définition 47

On appelle **système homogène associé à** (S) et noté (S_H) le système ayant les mêmes coefficients que (S) mais un second membre nul.

Exemple 48

Remarque 49

2 Écriture matricielle d'un système linéaire

Proposition 50

Avec les notations de la définition précédente, en posant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

le système linéaire précédent s'écrit

$$A\,X = B$$

et on appelle

- A la matrice des coefficients ;
- B le vecteur second membre.

Démonstration :

Exemple 51

3 Opérations élémentaires

Pour résoudre un système linéaire, on effectuera **uniquement** les opérations suivantes :

Définition 52

Soit (S) un système linéaire de n équations et p inconnues. On peut effectuer, si $i, j \in [\![1, n]\!]$, sur un système ou sur sa matrice augmentée associée, les opérations suivantes :

(i) échanger les lignes L_i et L_j : on note $L_i \leftrightarrow L_j$;

(ii) multiplier la ligne L_i par une constante **non nulle** $\lambda \in \mathbb{R}^*$: on note $L_i \leftarrow \lambda\, L_i$;

(iii) ajouter à ligne i un multiple d'une autre ligne j : pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $L_i \leftarrow L_i + \lambda\, L_j$, $(i \neq j)$.

Exemple 53

Définition 54

- Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $(S) \Leftrightarrow (S')$.
- Deux matrices A et A' sont dites **équivalentes en ligne** si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note

$$A \underset{L}{\sim} A'.$$

Théorème 55

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Démonstration :

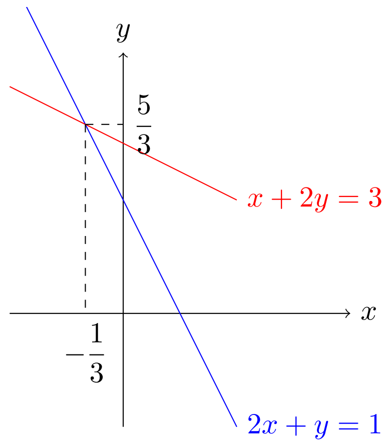
4 Exemples de résolution et interprétation géométrique des systèmes linéaires

Exemple 56

Résolvons le système, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ x + 2y & = & 3 \end{array} \right.$$

Interprétation graphique : Les droites se coupent en un point dont les coordonnées sont l'unique solution :

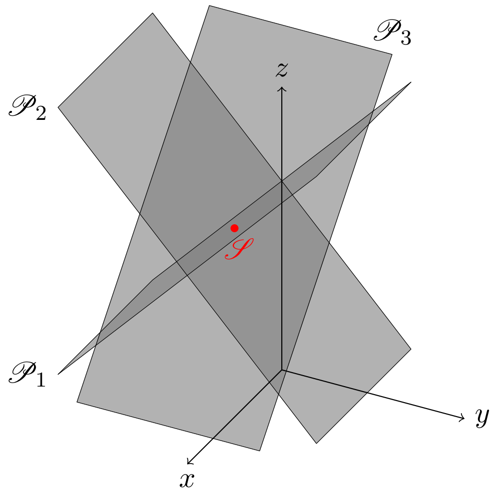


Exemple 57

Résolvons le système, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} z - y & = & 1 \\ y + z & = & 1 \\ 2x + 2z & = & 3 \end{array} \right.$$

Interprétation graphique : L'ensemble des solutions sont les coordonnées d'un unique point, intersection des trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ d'équations respectives : $x+z=1$, $z-y=1$, $2x+2z=3$.



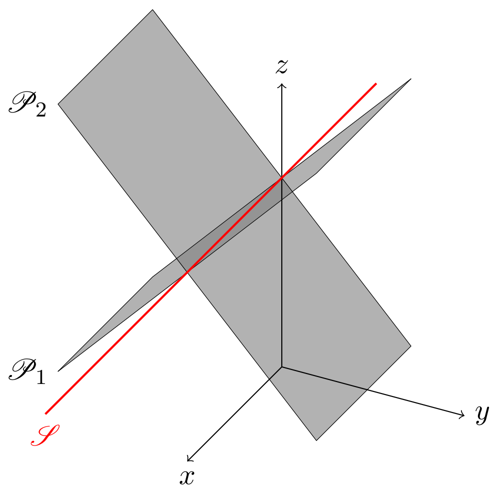
Exemple 58

Résolvons le système, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} z-y & = & 1 \\ y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

Interprétation graphique : L'ensemble des solutions sont les coordonnées de l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$: $y+z=1$, $z-y=1$. L'ensemble de ces points forment une droite d'équation paramétrique, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$



Remarque 59

III Résolution des systèmes linéaires

1 Systèmes échelonnés

Définition 60 (*Matrice échelonnée*)

Une matrice est dite **échelonnée par lignes** si elle vérifie les deux propriétés :

(i) si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;

(ii) à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé strictement à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Soit A une matrice de à n lignes et p colonnes échelonnée par lignes. On peut traduire la définition précédente de la façon suivante : il existe un entier r avec $0 \leq r \leq \min(n,p)$ et des entiers $j_1, \dots j_r$ vérifiant

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq p$$

telle que la matrice A ait la forme en escalier :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,j_1} & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,j_2} & & & & \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{r,j_r} & \cdots & a_{r,p} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $a_{i,j_i} \neq 0$.

Définition 61 (*Pivot*)

Les premiers coefficients non nuls de chaque ligne non nulle sont appelés les **pivots** de la matrice et on appelle **rang** le nombre de pivots.

Dans le schéma précédent, les pivots sont les coefficients $a_{1,j_1}, \dots, a_{r,j_r}$. En particulier, une matrice triangulaire supérieure est une matrice échelonnée.

Définition 62

- Une matrice est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est échelonnée par lignes, si tous les pivots sont égaux à 1 et si tous les coefficients au dessus de chaque pivot sont nuls.
- Un système linéaire est dit échelonné par lignes (respectivement échelonné réduit par lignes) si sa matrice des coefficients l'est.

Exemple 63

Définition 64

Soit (S) un système échelonné par lignes et A sa matrice des coefficients de la forme de la page précédente. On a les définitions suivantes :

- r s'appelle le **rang** du système (S) ou de la matrice A. C'est le nombre pivots.
- Les lignes L_1, L_2, $\ldots L_r$ sont appelées **équations principales** et les autres lignes, L_{r+1}, …, L_n, **équations de compatibilité**.
- Les inconnues x_{j_1}, x_{j_2}, …, x_{j_r} sont appelées **inconnues principales**. Les autres inconnues sont appelées **inconnues secondaires**.

Obtention de l'ensemble des solutions d'un système échelonné :

Exemple 65

Résolvons les deux systèmes échelonnés d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé :

(i)

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 3\,x + 2\,y + z & = & 1 \\ z + t & = & 2 \\ t & = & 3 \end{array} \right.$$

(ii)

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 3\,x + 2\,y + t & = & 1 \\ y + z + t & = & 2a \\ 0 & = & a \end{array} \right.$$

Remarque 66

2 Algorithme du pivot de Gauss

Théorème 67 (*Algorithme de Gauss-Jordan*)

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné par lignes.

Par définition d'un système équivalent, ceci signifie qu'on peut transformer, par des opérations élémentaires, n'importe quel système linéaire en un système échelonné par lignes. Le procédé pour effectuer cette transformation, qui sera utilisé dans la démonstration, est appelé **algorithme de Gauss-Jordan**.

Remarque 68

Le théorème précédent peut s'énoncer sous la forme suivante : tout matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée par lignes. C'est sous cette forme qu'on va démontrer le théorème.

Démonstration : On va raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de lignes de la matrice.

Initialisation : Si $n = 1$, une matrice du type

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \end{array}\right)$$

est bien une matrice échelonnée. La résultat est démontré pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose vraie la propriété suivante :

« Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, toute matrice augmentée à n lignes et p colonnes est équivalente à une matrice échelonnée par lignes. »

Soit M une matrice augmentée à $n+1$ lignes et p colonnes (le second membre n'est pas pris en compte dans la taille de la matrice) donnée par

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,j} & \cdots & a_{n+1,p} & b_{n+1} \end{array}\right)$$

Si tous les coefficients sont nuls, alors la matrice est échelonnée. Supposons qu'il existe au moins un coefficient non nul. Alors, il existe au moins une colonne de M qui ne contient pas uniquement des 0. Notons j la colonne non nulle la plus à gauche. On a :

$$M = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} & b_i \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,j} & \cdots & a_{n+1,p} & b_{n+1} \end{array}\right).$$

Il existe un coefficient non nul dans la colonne j. Notons $a_{i,j} \neq 0$ ce coefficient non nul et faisons l'opération élémentaire

$$L_i \leftrightarrow L_1.$$

On obtient la matrice équivalente :

$$M \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,p} & b_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,p} & b_{i+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,j} & \cdots & a_{n+1,p} & b_{n+1} \end{array}\right).$$

On effectue maintenant, pour tout $q \in [\![2, n]\!]$, sur cette matrice augmentée, les opérations :

$$L_q \leftarrow L_q - \frac{a_{q,j}}{a_{i,j}} L_1$$

et on obtient

$$M \underset{L}{\sim} M' = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,p} & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right)$$

où les $*$ sont des coefficients dont on ne donne pas l'expression. La matrice encadrée comporte n lignes et $p - j$ colonnes. Il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à cette matrice : on peut effectuer une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice encadrée pour la transformer en une matrice échelonnée par lignes. En appliquant ces transformations à toute la matrice M', la matrice M est équivalente à une matrice échelonnée par lignes ce qui achève la récurrence. □

Remarque 69 (*Unicité de la matrice échelonnée réduite*)

On a en fait le résultat plus précis : tout système linéaire est équivalent à un unique système linéaire échelonné **réduit** par lignes.

Exemple 70

Résolvons le système, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2\,y - 3\,z &=& 1 \\ x + 3\,y + z &=& 2 \end{array}\right.$$

3 Structure des solutions

On rappelle que si (S) est un système linéaire, son système homogène associé (S_H) est le système linéaire ayant les mêmes coefficients que (S) mais dont le second membre est nul.

Théorème 71

Soit (S) un système de n équations à p inconnues **compatible** et (S_H) son système homogène associé.
Notons $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ une solution particulière de (S).
Toute solution de (S) est la somme de $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ et d'une solution de (S_H).

Avec les notations du théorème, si $\mathscr{S}$ est l'ensemble des solutions de (S) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de S_H, on a : pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$:

$$(x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{S} \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_p) - (x_1^0, \ldots, x_p^0) \in \mathscr{S}_0.$$

Démonstration : Soit (S) un système de n équations à p inconnues **compatible** et (S_H) son système homogène associé avec :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{array} \right. .$$

Comme (S) est compatible, il admet au moins une solution : il existe $(x_1^0, \ldots, x_p^0) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1^0 & + & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p^0 & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1^0 & + & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p^0 & = & b_n \end{array} \right. .$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p & = b_1 = & a_{1,1}\,x_1^0 & + & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p^0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p & = b_n = & a_{n,1}\,x_1^0 & + & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p^0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,(x_1 - x_1^0) & + & \cdots & + & a_{1,p}\,(x_p - x_p^0) & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,(x_1 - x_1^0) & + & \cdots & + & a_{n,p}\,(x_p - x_p^0) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Cette équivalence montre donc que $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (S) si et seulement si

$$(x_1 - x_1^0, \ldots, x_p - x_p^0) = (x_1, \ldots, x_p) - (x_1^0, \ldots, x_p^0)$$

est solution du système homogène (S_H) associé à (S). $\square$

Exemple 72

Considérons à nouveau le système, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccc} x + 2\,y - 3\,z & = & 1 \\ x + 3\,y + z & = & 2 \end{array} \right.$$

Proposition 73 (*Structure des solutions d'un système homogène*)

Soit (S_H) un système linéaire **homogène** à n équations et p inconnues dont l'ensemble des solutions est noté $\mathscr{S}_0$. On a les propriétés suivantes :

(i) $(0,\dots,0)\in\mathscr{S}_0$;

(ii) pour tout $(x_1,\dots,x_p)\in\mathscr{S}_0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\lambda\,(x_1,\dots,x_p)=(\lambda\,x_1,\dots,\lambda\,x_p)\in\mathscr{S}_0$;

(iii) pour tous $(x_1,\dots,x_p),(y_1,\dots,y_p)\in\mathscr{S}_0$, on a

$$(x_1,\dots,x_p)+(y_1,\dots,y_p)=(x_1+y_1,\dots,x_p+y_p)\in\mathscr{S}_0.$$

Remarque 74

On verra, plus tard dans l'année, que la proposition précédente signifie que l'ensemble des solutions d'un système homogène est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^p$.

Démonstration : Soit (S_H) un système linéaire à n équations et p inconnues dont $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des solutions :

$$(S_H)\ \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p & = & 0\\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p & = & 0\end{array}\right.$$

En remplaçant x_1, …,x_p par $0,\dots,0$ dans le système précédent, le système est clairement vérifié ce qui montre le point (i) du théorème.
Soient $(x_1,\dots,x_p),(y_1,\dots,y_p)\in\mathscr{S}_0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
On a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,(\lambda\,x_1) & + & \cdots & + & a_{1,p}\,(\lambda\,x_p) & = & \lambda\,(a_{1,1}\,x_1+\cdots+a_{1,p}\,x_p)=\lambda\,0=0\\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}\,(\lambda\,x_1) & + & \cdots & + & a_{n,p}\,(\lambda\,x_p) & = & \lambda\,(a_{n,1}\,x_1+\cdots+a_{n,p}\,x_p)=\lambda\,0=0\end{array}\right.$$

donc $\lambda\,(x_1,\dots,x_p)=(\lambda\,x_1,\dots,\lambda\,x_p)\in\mathscr{S}_0$.
On a :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}\,(x_1+y_1)+\cdots+a_{1,p}\,(x_p+y_p) & = & (a_{1,1}\,x_1+\cdots+a_{1,p}\,x_p)+(a_{1,1}\,y_1+\cdots+a_{1,p}\,y_p)=0+0=0\\ & \vdots & \\ a_{n,1}\,(x_1+y_1)+\cdots+a_{n,p}\,(x_p+y_p) & = & (a_{n,1}\,x_1+\cdots+a_{n,p}\,x_p)+(a_{n,1}\,y_1+\cdots+a_{n,p}\,y_p)=0+0=0\end{array}\right.$$

donc $(x_1,\dots,x_p)+(y_1,\dots,y_p)=(x_1+y_1,\dots,x_p+y_p)\in\mathscr{S}_0$ $\square$

4 Résolution complète

On obtient finalement le théorème général :

Théorème 75

Tout système de n équations et p inconnues possède

(i) **ou bien** une infinité de solutions ;

(ii) **ou bien** aucune solution ;

(iii) **ou bien** une unique solution.

Exemple 76

Soit $\alpha,a\in\mathbb{R}$ des réels fixés. Résolvons le système, d'inconnues $x,y,z\in\mathbb{R}$ donné par

$$(S_{\alpha,a})\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2\,z & = & 0\\ x-2\,y+z & = & 0\\ \alpha\,x+y+z & = & a\end{array}\right. .$$

5 Des exemples de résolution complète

Exemple 77

On traite la résolution des exemples suivants :

(i) le système d'inconnues $u, v, w \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} u+v-3\,w &=& -6 \\ 2\,v-w &=& 1 \\ -2\,u-4\,v+3\,w &=& -1 \end{array}\right. \quad ;$$

(ii) le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+2\,y-3\,z &=& 4 \\ x+3\,y+z &=& 11 \\ 2\,x+5\,y-4\,z &=& 13 \\ 4\,x+11\,y &=& 38 \end{array}\right. \quad ;$$

(iii) le système, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} x-3\,y+7z &=& 1 \\ x+2\,y-3\,z &=& 0 \\ 7\,x+4\,y-z &=& 2 \end{array}\right. \quad ;$$

(iv) le système, paramétré par $a, b, c \in \mathbb{R}$, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ donné par

$$(S_{a,b,c})\ \left\{\begin{array}{rcl} x-3\,y+7z &=& a \\ x+2\,y-3\,z &=& b \\ 7\,x+4\,y-z &=& c \end{array}\right. \quad .$$

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

IV Matrices inversibles

1 Définition, propriétés

Définition 78

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Dans ce cas B est unique et on note : $B = A^{-1}$.

Remarque 79

Exemple 80

Proposition 81

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a les propriétés :

(i) si A est inversible, A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

(ii) si A, B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$;

(iii) si A est inversible, alors A^{T} est inversible et $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

Démonstration :

Exemple 82

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + 2A + 2I_n = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

Remarque 83

2 Critères d'inversibilité

Théorème 84

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre les énoncés :

(i) A est inversible ;

(ii) le système linéaire d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $AX = O$ n'admet que la solution nulle ;

(iii) le rang de A vaut n.

Ce théorème ne peut pas être démontré pour le moment mais le sera plus tard dans l'année.

3 Des exemples de calculs d'inverses de matrices