Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours, 2 exercices et 2 problèmes tous indépendants. On rappelle que pour la majorité de la classe, les questions de cours, les deux exercices et le problème 1 sont à traiter. Pour les élèves à qui il a été précisé de faire le DS dans une version plus difficile : les questions de cours, le problème 1 et le problème 2 sont à traiter.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Questions de cours

1. On considère une famille libre $(e_1,\dots,e_p)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Donner deux critères différents pour que cette famille soit une base de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le noyau d'une application linéaire f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F pour que f soit injective.

Exercice 1 : Une décomposition de $\mathbb{R}^3$ (adapté concours e3a PC)

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère les ensembles :

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+3z=0\right\} \quad \text{et} \quad G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y-z=0,\ 2x+z=0\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $u=(1,1,0)$ et $v=(-3,0,1)$ appartiennent à F. En déduire que $\mathrm{Vect}(u,v)\subset F$.
3. Montrer que (u,v) est libre.
4. Montrer réciproquement que $F\subset\mathrm{Vect}(u,v)$ (on pourra résoudre le système : $x-y+3z=0$).
5. En suivant par exemple la démarche des trois questions précédentes, montrer que $G=\mathrm{Vect}(w)$ où
$$w=(-\tfrac{1}{2},1,1).$$
6. Déterminer les dimensions de F et de G.
7. Montrer que $F\cap G=\{(0,0,0)\}$.
8. Conclure que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

On considère l'application

$$\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & x-y+3z\end{array}.$$

9. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, que $w\notin\ker(\varphi)$ et que
$$F=\ker(\varphi).$$

On peut montrer de façon générale que tout plan de $\mathbb{R}^3$ est le noyau d'une application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et qu'on peut décomposer $\mathbb{R}^3$ sous la forme $\mathbb{R}^3=\ker(\varphi)\oplus\mathrm{Vect}(w)$ où $w\notin\ker(\varphi)$.

Exercice 2 : Une symétrie vectorielle (adapté oral CCP PSI)

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'application

$$S:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\dfrac{x-2y-2z}{3},\dfrac{-2x+y-2z}{3},\dfrac{-2x-2y+z}{3}\right)\end{array}.$$

On note $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,-1,0)$ et $e_3=(0,1,-1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que l'identité de $\mathbb{R}^3$ est l'application $Id_{\mathbb{R}^3}$ qui vérifie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$Id_{\mathbb{R}^3}\big((x,y,z)\big)=(x,y,z).$$

1. Montrer que (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $S(e_1)=-e_1$, $S(e_2)=e_2$ et $S(e_3)=e_3$.
3. En déduire que $S^2(e_i)=e_i$ pour $i=1,2,3$.
4. Soit $e\in\mathbb{R}^3$. Justifier qu'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que :
$$e=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3.$$
5. Justifier que $S(e)=\lambda_1 S(e_1)+\lambda_2 S(e_2)+\lambda_3 S(e_3)$ et que $S^2(e)=\lambda_1 S^2(e_1)+\lambda_2 S^2(e_2)+\lambda_3 S^2(e_3)$.
6. Conclure que $S^2(e)=e$ puis que $S\circ S=Id_{\mathbb{R}^3}$.

On pose $\psi=S-Id_{\mathbb{R}^3}$.

7. Montrer que pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\psi\big((x,y,z)\big)=-\frac{2}{3}(x+y+z,x+y+z,x+y+z)$.
8. En résolvant le système $x+y+z=0$, montrer que (e_2,e_3) est une base de $\ker(\psi)$. En déduire la dimension de $\ker(\psi)$.
9. Montrer que (e_1) est une base de $\ker(S+Id_{\mathbb{R}^3})$.
10. Montrer que $\mathbb{R}^3=\ker(S+Id_{\mathbb{R}^3})\oplus\ker(S-Id_{\mathbb{R}^3})$.

Géométriquement, cet exercice signifie que S est la symétrie par rapport au plan d'équation $x+y+z=0$ qui n'est autre que le noyau de $S-Id_{\mathbb{R}^3}$.

Problème 1 : Application Δ sur les polynômes

Ce problème étudie une application qui transforme des sommes complexes à déterminer en des calculs plus simples. On rappelle que si $P(X)$ est un polynôme, le polynôme $P(X+1)$ est le polynôme où l'on a remplacé l'indéterminée X par $X+1$: par exemple, si $P(X)=X^4$, $P(X+1)=(X+1)^4$.

1. Développer et simplifier $P(X+1)-P(X)$ pour $P(X)=1$, $P(X)=X$, $P(X)=X^2$, $P(X)=X^3$.

Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. On pose $P(X)=a+bX+cX^2+dX^3\in\mathbb{R}_3[X]$.

2. Montrer que :
$$P(X+1)-P(X)=(b+c+d)+(2c+3d)X+3dX^2.$$
Quel est au plus le degré de $P(X+1)-P(X)$?

On introduit l'ensemble
$$V=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P(0)=0\}.$$

3. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et montrer que $\mathrm{Vect}(X,X^2,X^3)\subset V$.
4. Montrer que $P\in V$ si et seulement si $a=0$. En déduire que la famille (X,X^2,X^3) est une famille génératrice de V.
5. Justifier que (X,X^2,X^3) est une famille libre et donner une base de V. Quelle est la dimension de V ?

On peut ainsi introduire l'application :
$$\begin{array}{rcl}\Delta : V & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X)\end{array}.$$

6. Montrer que Δ est une application linéaire de V dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Injectivité de Δ

On souhaite montrer que Δ est injective.

7. Justifier que $\{0\}\subset\ker(\Delta)$ où 0 désigne le polynôme nul.
8. Soit $P\in\ker(\Delta)$. Montrer que $P(X+1)=P(X)$ puis que $P(0)=P(1)=P(2)=P(3)$.
9. En remarquant que $P\in V$, en déduire que $0=P(0)=P(1)=P(2)=P(3)$.
10. Si P était non nul, combien P aurait-il de racines distinctes au maximum ?
11. Montrer que $\ker(\Delta)=\{0\}$ où 0 désigne le polynôme nul et conclure.

Surjectivité de Δ

On souhaite montrer que Δ est surjective. On introduit les polynômes :

$$B_0 = 1, \quad B_1 = X, \quad B_2 = \frac{1}{2} X\,(X-1), \quad B_3 = \frac{1}{6} X\,(X-1)\,(X-2).$$

12. Calculer $\Delta(B_0)$ puis montrer que pour $i = 1,2,3$, $\Delta(B_i) = B_{i-1}$.
13. Justifier que (B_0, B_1, B_2) est libre puis que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
14. Justifier que $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$. Compte-tenu de la question précédente 13, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(X) = \lambda_0 B_0 + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2.$$

16. On pose $Q(X) = \lambda_0 B_1 + \lambda_1 B_2 + \lambda_2 B_3$. Montrer que $Q \in V$ et que $\Delta(Q) = P$.
17. En déduire que $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathrm{Im}(\Delta)$ et conclure.

Ainsi l'application Δ est un isomorphisme de V sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Une expression de somme

18. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(X) \in V$ tel que $\Delta(Q) = X^2$.
19. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n} \big(Q(i+1) - Q(i)\big) = Q(n+1)$
20. Déterminer l'expression de $Q(X)$ (on pourra s'aider de la question 16).
21. Déterminer une formule pour $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2$.
