Questions de cours

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les dimensions des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Donner les développements limités de cos et sin en 0 à l'ordre 3.
3. Que dire d'un polynôme de degré au plus n qui a au moins $n+1$ racines distinctes ?

Exercice 1 : *Interpolation polynomiale*

On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$L_1(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X), \quad L_2(X) = 1 - X^2, \quad \text{et} \quad L_3(X) = \frac{1}{2}(X^2 + X).$$

1. Déterminer les racines et le degré de L_1, L_2 et L_3.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

2. Montrer que $P(-1)L_1(X) + P(0)L_2(X) + P(1)L_3(X) \in \mathbb{R}_2[X]$.
3. On pose $Q(X) = P(X) - [P(-1)L_1(X) + P(0)L_2(X) + P(1)L_3(X)]$. Quel est au plus le degré de Q ? Montrer que -1, 0 et 1 sont racines de Q.
4. En déduire que Q est nul puis que :

$$P(X) = P(-1)L_1(X) + P(0)L_2(X) + P(1)L_3(X)$$

5. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(-1) = P(1) = 0$ et $P(0) = 2$ dont on donnera l'expression.

On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$H_1(X) = 1 - X^2, \quad H_2(X) = X - X^2, \quad \text{et} \quad H_3(X) = X^2.$$

6. En introduisant un polynôme Q, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$P(X) = P(0)H_1(X) + P'(0)H_2(X) + P(1)H_3(X).$$

7. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 1$ et $P(1) = 0$ dont on donnera l'expression.

On considère deux réels $a < b$ et les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$K_1(X) = 1 - \frac{(X-a)^2}{(b-a)^2}, \quad K_2(X) = (X-a)\left[1 - \frac{X-a}{b-a}\right], \quad \text{et} \quad K_3(X) = \frac{(X-a)^2}{(b-a)^2}.$$

8. Calculer les valeurs de K_1, K_2, K_3 en a et en b et de K_1', K_2', K_3' en a.
9. En introduisant à nouveau un polynôme Q, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$P(X) = P(a)K_1(X) + P'(a)K_2(X) + P(b)K_3(X).$$

Exercice 2 : *Accélération de convergence*

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} - 1.$$

4. En déduire les deux égalités

$$f(x) = e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = e - e\frac{x}{2} + e\frac{11}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

5. En déduire la limite de la fonction f en 0. On prolonge f par cette valeur en 0.
6. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{e}{2}$.
7. Déterminer un équivalent de $f(x) - e$ lorsque x tend vers 0.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e et donner un équivalent de la suite $(u_n - e)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2u_{2n} - u_n$.

9. Montrer que $v_n - e \sim -\dfrac{11e}{48n^2}$. Quel est l'intérêt de cette suite ?

Problème 1 : *Une fonction définie par une intégrale (Adapté petites Mines 2008)*

Partie I : Développements limités et régularité

On considère la fonction

$$F : x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

1. Justifier que la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que F' est du même signe que $h : x \mapsto x\cos x - \sin x$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer un développement limité de la fonction F en 0 à l'ordre 2 (on pourra d'aider de la question de cours 2).
4. Montrer que F est prolongeable par continuité en 0 (on précisera par quelle valeur). Dans la suite, on notera à nouveau F son prolongement.
5. Montrer que F est dérivable en 0 et donner une équation de sa tangente en 0.
6. Étudier la position de la courbe représentative de F par rapport à sa tangente en 0 au voisinage de 0.
7. Déterminer les solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = 0$.
8. Montrer, sans calcul, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $F'(a_k) = 0$.
9. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, h est strictement monotone sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ (on précisera la monotonie selon la parité de k et on pourra dériver h).
10. Les réels a_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$, sont-ils uniques ?
11. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ainsi qu'un équivalent de cette suite (on pourra écrire un encadrement).

Partie II : Une fonction définie par une intégrale.

On introduit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On rappelle que pour toute fonction φ continue sur $[0,1]$,

$$\left|\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

12. Montrer que E est un espace vectoriel.

On considère dans la suite $f \in E$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$I_f(x) = \int_0^1 f(t)\,\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

13. Justifier que I_f est bien définie et que f' est bornée sur $[0,1]$.
14. Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$I_f(x) = \frac{\sin(x)f(1)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 \sin(xt)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

15. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}^{+}$ (dépendant de f) tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$,

$$|I_f(x)| \leq \frac{C}{x}$$

puis déterminer la limite de I_f en $+\infty$.

Partie III : Continuité de I_f.

16. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. En utilisant l'égalité des accroissements finis appliquée à une fonction bien choisie, montrer qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$\cos(b) - \cos(a) = -\sin(c)(b-a).$$

17. En déduire que pour tout $t \in [0,1]$ et $x, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$|\cos(xt) - \cos(x_0 t)| \leq |t|\,|x - x_0|.$$

18. Montrer ainsi que pour tout $x, x_0 \in \mathbb{R}$,

$$|I_f(x) - I_f(x_0)| \leq |x - x_0| \int_0^1 |t f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

19. Conclure que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.
20. Retrouver ainsi la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

Problème 2 : *Polynômes de Legendre et intégration numérique (adapté concours CCP/Mines)*

On définit une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$, $P_1 = 2X - 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)(2X-1)P_n + nP_{n-1} = 0.$$

Partie I : Premières propriétés des polynômes

1. Calculer P_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n.
3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n le coefficient dominant de P_n. Montrer que $a_{n+1} = \frac{4n+2}{n+1} a_n$.
4. Déduire de la question précédente, en effectuant une récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Partie II : Formule de Rodrigues

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{n!} X^n (X-1)^n$.

5. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U'_{n+1} = (2X-1)U_n$ et que $U''_{n+1} = 2(2n+1)U_n + U_{n-1}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant n fois la première relation de la question précédente et $n-1$ fois la seconde, montrer que

$$(n+1)U_{n+1}^{(n+1)} - (2n+1)(2X-1)U_n^{(n)} + nU_{n-1}^{(n-1)} = 0.$$

La notation ${U_n}^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de U_n.

7. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = U_n^{(n)}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quels sont les ordres de multiplicité de 0 et de 1 en tant que racine de U_n ? En déduire les valeurs, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ de $U_n^{(i)}(0)$ et de $U_n^{(i)}(1)$.
9. Avec les deux questions précédentes, et en effectuant des intégrations par parties, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$,

$$\int_0^1 U_n(t) f^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 P_n(t) f(t)\ \mathrm{d}t.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(Q) < n$, on a :

$$\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Partie III : Racines des polynômes

Dans cette partie, on utilisera les notations de la partie précédente et le résultat des questions 7 et 8.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, U_n' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$ et que U_n'' s'annule au moins deux fois sur $]0,1[$. On utilisera 8 et le théorème de Rolle.
12. Montrer finalement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]0,1[$.
13. Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in]0,1[$ distincts tel que :

$$P_n(X) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(X - x_1)\cdots(X - x_n).$$

Partie IV : Interpolation polynomiale et intégration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les réels $x_1, \ldots, x_n$ définis dans la partie précédente.

14. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, montrer qu'il existe un unique polynôme L_k de degré $n-1$ tel que $L_k(x_k) = 1$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$, $L_k(x_j) = 0$. On donnera notamment une expression factorisée de ces polynômes.
15. Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus $n-1$,

$$P = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k.$$

    On pourra poser $Q = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k$ et évaluer $P - Q$ en $x_1, \ldots, x_n$.
16. On pose, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\ell_k = \int_0^1 L_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

    Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}$, on a

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \ell_k P(x_k).$$

    On pourra effectuer la division euclidienne de P par P_n.

Cette dernière question montre que pour calculer l'intégrale de P sur $[0,1]$, il suffit de connaître P en n points bien que P est de degré au plus $2n-1$.