PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante à l'intérieur de chaque exercice/problème.
La calculatrice est interdite. Durée : 4h.

Bon courage !

Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations. Cet énoncé comporte une partie questions de cours, 3 exercices et un problème indépendants.

Questions de cours

1. Donner, sans démonstration, la formule d'intégration par parties (on n'oubliera pas le « Soit f,g deux fonctions de classe ... sur ... »).
2. Donner la définition de deux suites adjacentes.
3. Énoncer le théorème de la limite monotone dans le cas croissant.

Exercice 1 : Deux suites adjacentes

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
5. Déduire de la question précédente un encadrement de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 : Résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction

$$\varphi : x \mapsto 3xe^{-x^2} - 1.$$

1. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer la dérivée de φ.
2. Dresser le tableau des variations de φ et représenter l'allure de la courbe représentative de φ.

On considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$xy' - (1-2x^2)y = 1 - 2x^2. \tag{E}$$

3. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x} - 2x$.
4. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]0,+\infty[$. On écrira l'ensemble des solutions.
5. Montrer que la fonction constante $x \mapsto -1$ est une solution particulière à l'équation (E) puis écrire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.
6. Déterminer également l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,0[$.

On souhaite désormais déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui satisfont l'équation (E).

7. Montrer que φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
8. Justifier que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui satisfait l'équation (E) alors il existe deux constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} C_1xe^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]0,+\infty[, \\ -1 & \text{si } x = 0, \\ C_2xe^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]-\infty,0[. \end{cases}$$

9. Montrer, avec les notations de la question précédente, en utilisant la continuité de f' que $C_1 = C_2$.
10. Déterminer finalement toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

Exercice 3 : Formule de Madhava-Leibniz

On rappelle que la fonction tangente est définie par :

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

1. Rappeler le domaine de dérivabilité de la fonction tangente ainsi que sa dérivée. Quelle est la monotonie de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$:

$$0 \leq \tan x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \tan^{2n+2}(x) \leq \tan^{2n}(x).$$

3. Déterminer une primitive de $\tan^2$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en remarquant que $\tan^2 = \left(1+\tan^2\right) - 1$.

Pour la suite de l'exercice, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(t)\ \mathrm{d}t.$$

4. Calculer I_0 et I_1.
5. À l'aide de la question 2, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \leq I_n$ et

$$0 \leq I_n \leq I_n + I_{n+1}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En faisant le changement de variable $y = \tan t$, montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(t)\left(1+\tan^2(t)\right)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}$$

puis que $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$

7. Déduire de la question précédente et de la question 5 que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
8. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$(-1)^n I_n = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

9. Conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k-1} = -\dfrac{\pi}{4}$.

C'est la première formule qui a permis d'obtenir au XV^e siècle 11 décimales de π.

Problème *Étude de* $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ *(adapté divers concours PSI)*

Partie I : Une limite

On souhaite montrer dans cette première partie que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé**. Justifier que $h : t \mapsto (x-t)^2$ est dérivable au moins 2 fois sur $\mathbb{R}$ et calculer h' et h''.
2. Calculer, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$.
3. On considère les fonctions

$$\psi : t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2} \quad \text{et} \quad \varphi : t \mapsto \frac{1}{(1+t)^3}.$$

   Montrer que ces fonction admettent des primitives sur $]-1,+\infty[$ qu'on déterminera.
4. Soit $x \in]-1,+\infty[$. En effectuant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^x (x-t)^2 \frac{1}{(1+t)^3}\mathrm{d}t = \left[(x-t)^2 \frac{-1}{2(1+t)^2}\right]_0^x - \int_0^x (x-t)\frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

5. En déduire que pour tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$\int_0^x (x-t)^2 \frac{1}{(1+t)^3}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - x + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$

6. Avec la question précédente et la question 2, montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$,

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\mathrm{d}t.$$

7. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, pour tout $t \in [0,x]$,

$$0 \leq \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \leq x^2 \quad \text{puis que} \quad \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\mathrm{d}t \leq x.$$

8. Montrer qu'on a, pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$,

$$\left|\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3}\mathrm{d}t\right| \leq |x|.$$

9. Conclure, en citant précisément les théorèmes utilisés que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Partie II : Une suite récurrente

On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 \in]0,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n).$$

10. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$. On déterminera notamment son signe.
11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,+\infty[$. Ceci justifie que la suite est bien définie.
12. Déterminer, avec la question 10, la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
13. En précisant le théorème utilisé, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite ℓ.
14. Justifier que $\ell \in \mathbb{R}^+$ puis que $\ln(1+\ell) = \ell$.
15. Conclure que $\ell = 0$.

Partie III : Détermination d'un équivalent de la suite

16. Montrer que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

17. En justifiant l'égalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2},$$
montrer, avec la première partie, que
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

On admet le théorème de Cesàro : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite ℓ alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$$
est convergente de limite ℓ.

18. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{2}$.

19. En déduire que
$$\frac{1}{n\,u_n} \sim \frac{1}{2}$$
et donner un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20. Démontrer le théorème de Cesàro admis dans l'énoncé.