Corrigé D.S. 1 PCSI

1) f est définie en $x \in \mathbb{R}$ lorsque $1-x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$. Ainsi, f est définie sur :

$$\boxed{\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}}.$$

2) On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Ainsi f est négative sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ et positive sur $[-1, 1[$.

3) Le numérateur et le dénominateur de f sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ce dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ainsi f est dérivable sur $\mathcal{D}(f)$.

On a, pour tout $x \in \mathcal{D}(f)$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (1+x) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}}.$$

4) Pour tout $x \in \mathcal{D}(f)$:

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$$ donc f est strictement croissante sur $\mathcal{D}(f)$.

5) On a, pour tout $x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$:

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{-1 + \frac{1}{x}}.$$

On $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -1 + \frac{1}{x} = -1$ donc par opérations sur les limites,

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1}.$$

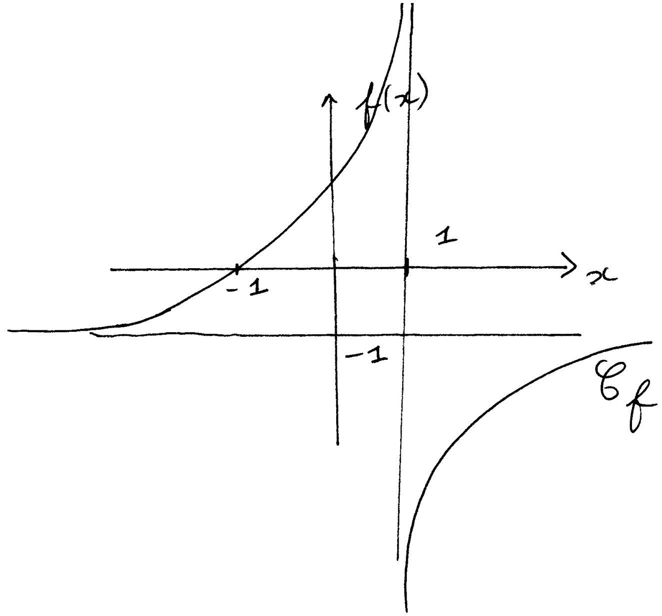
De même $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$.

On a $\lim\limits_{x \to 1} 1 + x = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x = 0^+$ donc, par opérations sur les limites :

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty}.$$

De même, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

6)



7) Comme $\sqrt{\ }$ est définie sur $[0,+\infty[$, g est définie en $x \in \mathbb{R}$ lorsque $x \neq 1$ et $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$.

Ainsi, avec la question 2, $\boxed{g \text{ est définie sur } [-1,1[}$.

Comme $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, de manière analogue au raisonnement précédent, g est dérivable sur $]-1,1[$.

8) On a, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$

donc :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

donc : $\boxed{g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

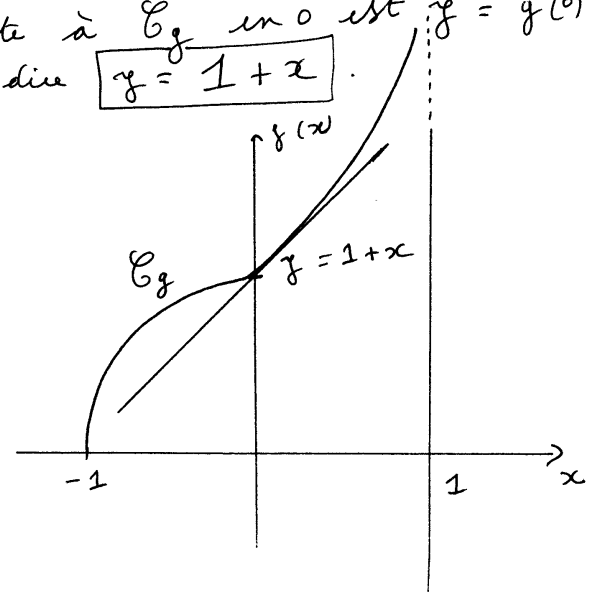
9) On a, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ donc, par composition :

$$\boxed{\lim_{x \to -1^+} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty}.$$

On a le tableau, puisque g est strictement positive sur $]-1,1[$:

x	$-\infty$	$+\infty$
g'	$+$	
g	$0 \nearrow$	$+\infty$

10) On a $g'(0) = \frac{1}{(1-0)^2}\sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = 1$ et $g(0) = \sqrt{\frac{1+0}{1-0}} = 1$ donc, une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en 0 est $y = g(0) + g'(0)(x-0)$ c'est-à-dire $\boxed{y = 1 + x}$.



Exercice 2 :

1) g est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme somme et pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$g'(x) = -\frac{1}{1+x} + 1 = -\frac{1-1-x}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

On a le tableau, comme $g(0) = -\ln(1) + 0 = 0$,

x	-1		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(0)=0$	$\nearrow$	

Ainsi, g est positive sur $]-1,+\infty[$ donc, pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$g(x) \geqslant 0 \iff x - \ln(1+x) \geqslant 0$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $-\ln(1+x) \geqslant -x$.

2) Une équation de la tangente à la courbe de h en 0 est donnée par :

$$y = h(0) + h'(0)(x-0)$$
$$= \underbrace{-\ln(1)}_{=0} + \frac{-1}{1+0}(x-0)$$

c'est-à-dire $y = -x$.

Avec l'inégalité de 1, la courbe de h est située au-dessus de sa tangente en 0.

3) On a $\varphi(0) = f'(0) - f'(0) = 0$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = f''(x) \geqslant 0.$$

Ainsi φ est croissante sur $\mathbb{R}$. On a le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'			$+$		
φ		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Comme $\varphi(0) = 0$, φ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$.

4) On a $\psi(0) = f(0) - 0 \times f'(0) - f(0) = 0$ et ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi'(x) = f'(x) - 1 \times f'(0) + 0$$
$$= f'(x) - f'(0) = \varphi(x).$$

On a le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\psi' = \varphi$		$-$	0	$+$	
ψ		$\searrow$	$\psi(0)=0$	$\nearrow$	

Ainsi, φ est positive sur $\mathbb{R}$.

5) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant f(0) + x\, f'(0).$$

Or $y = f(0) + x\, f'(0)$ est une équation de la tangente à la courbe de f en 0. D'après l'inégalité précédente, la courbe de f est au-dessus de cette tangente.

6) On a, comme h est dérivable deux fois sur $]-1, +\infty[$ comme composée, pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$h''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2} \geqslant 0.$$

Ainsi en prenant $f = h$ dans les questions 3 à 5, la courbe de h est située au-dessus de sa tangente en 0.

7) Considérons $a \in \mathbb{R}$. Montrons que la courbe de f est située au-dessus de sa tangente en a d'équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Posons :

$$\varphi_a : x \longmapsto f(x) - f'(a)(x-a) + f(a).$$

φ_a est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi_a'(x) = f'(x) - f'(a)$

$$\varphi_a''(x) = f''(x) \geqslant 0.$$

On a le tableau, puisque $\varphi_a'(a) = 0$ et $\varphi_a(a) = 0$:

x		a	
φ_a''		$+$	
φ_a'	$\nearrow$	0	$\nearrow$
φ_a'	$-$	0	$+$
φ_a	$\searrow$	$\varphi(a) = 0$	$\nearrow$

Ainsi, φ_a est positive sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_a(x) \geqslant 0$$

ce qui s'écrit :

$$\boxed{f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)}$$

La courbe de f est située au-dessus de sa tangente en a.

Exercice 3 :

1) Comme exp est définie sur $\mathbb{R}$, par composition, f est définie sur $\mathbb{R}$.
Comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On a $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc,

par opérations : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

De même, $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

3) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x).$$

On a $f'(0) = \frac{1-1}{2} = 0$.

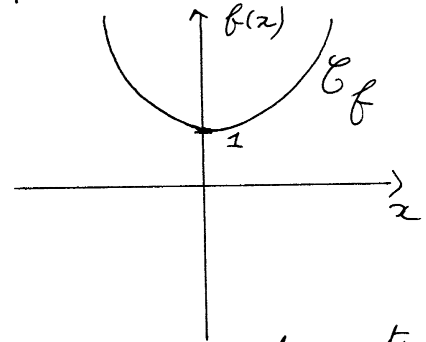
4) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x).$$

Ainsi, f est une fonction paire.

5) On a le tableau, comme f'' est positive sur $\mathbb{R}$ (somme d'exponentielles) et que $f(0) = \frac{1+1}{2} = 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''			$+$		
f'		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(0) = 1$	$\nearrow$	$+\infty$



6) Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 est donnée par :

$$y = \underbrace{f(0)}_{=1} + x \underbrace{f'(0)}_{=0} = 1$$

c'est-à-dire $\boxed{y = 1}$.

7) φ est définie en $x \in \mathbb{R}$ lorsque $x^2 - 1 \geq 0$.
Comme l'équation $x^2 - 1 = 0$ possède deux solutions -1 et 1, $x^2 - 1 \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
Ainsi φ est définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

8) Soit $\boxed{x \in [1, +\infty[}$.

On a $x > 0$ et $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$ donc :

$$\boxed{x + \sqrt{x^2-1} > 0}.$$

9) Soit $x \in]-\infty, -1]$. On a $x^2 - 1 < x^2$ donc, par croissance stricte de $\sqrt{\ }$, on a :

$$\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x$$ qui

donne : $\sqrt{x^2-1} + x < 0$.

En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } x \in]-\infty, -1], \sqrt{x^2-1} + x < 0}$.

10) Comme $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$ et $\sqrt{\ }$ sur $[0, +\infty[$, g est définie en $x \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$x^2 - 1 \geqslant 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2-1} > 0.$$

D'après les questions 7, 8 et 9 ces conditions correspondent au fait que $x \in [1, +\infty[$.

En conclusion, g est définie sur $[1, +\infty[$.

11) Comme $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\sqrt{\ }$ sur $]0, +\infty[$, g est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$x^2 - 1 > 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2-1} > 0.$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est dérivable sur } [1, +\infty[\setminus \{1\} =]1, +\infty[}$.

12) D'après le tableau de variations de la question 5, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 1$ donc

$$\boxed{y = f(x) \geqslant 1}.$$

On a les équivalences

$$y = f(x) \iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\iff 2y = e^x + e^{-x}$$
$$\iff 2y \times e^x = (e^x)^2 + \underbrace{e^x e^{-x}}_{=1}$$
$$\iff (e^x)^2 - 2y e^x + 1 = 0.$$

13) On suppose que $y \neq 1$. On a $y \in]1, +\infty[$.

On a les équivalences :

$$y > 1 \iff y - 1 > 0$$
$$\iff -2y + 2 < 0$$
$$\iff -2y + 1 < -1$$
$$\iff y^2 - 2y + 1 < y^2 - 1$$
$$\iff (y-1)^2 < y^2 - 1$$

Or $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc :

$$\sqrt{(\underbrace{y-1}_{>0})^2} = y - 1 < \sqrt{y^2-1}$$

qui donne :

$$\boxed{y - \sqrt{y^2-1} < 1}.$$

14) Posons $X = e^x$ dans l'équation de 12. On a :

$$X^2 - 2y X + 1 = 0.$$

On résout cette équation d'inconnue $X \in]0, +\infty[$ ($X = e^x > 0$).
Le discriminant vaut $(-2y)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4(y^2 - 1) \geq 0$.
Si $y = 1$, l'équation possède une unique racine

$$\frac{+2y}{2} = y.$$

Si $y \neq 1$, l'équation possède deux racines :

$$\frac{2y - \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y - \sqrt{y^2-1} \quad \text{et} \quad y + \sqrt{y^2-1}.$$

Comme $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ donc $X \geq 1$. Avec la question précédente, comme $y - \sqrt{y^2-1} < X$, nécessairement

$$X = y + \sqrt{y^2-1}.$$

Cette formule couvre aussi le cas $y = 1$.
On a donc $e^x = \underbrace{y + \sqrt{y^2-1}}_{>0}$ ce qui donne

$$\boxed{x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = g(y)}.$$

15) g est la fonction réciproque de f lorsqu'on considère f uniquement sur $[0, +\infty[$.
Les courbes de g et f sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.