PCSI

Le sujet est long et il ne vous sera peut-être pas possible de tout faire. La difficulté est relativement croissante : les secondes moitiés des exercices 2 et 3 deviennent plus difficiles. La calculatrice est interdite.

Bon courage !

DS 1

Vous laisserez une marge en haut sur la première page et laisserez la marge de gauche de votre copie libre pour les annotations.

Cet énoncé comporte une partie questions de cours et 3 exercices indépendants.

Questions de cours

1. Donner les domaines de définition, de dérivabilité ainsi que la dérivée des fonctions ln et racine carrée.
2. Énoncer la définition de la valeur absolue d'un réel x.
3. Énoncer sans démonstration l'inégalité triangulaire pour deux réels x et y.

Exercice 1 *Étude d'une fonction*

On définit, lorsque c'est possible,

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f qu'on notera $\mathscr{D}(f)$.
2. Déterminer le signe de f sur $\mathscr{D}(f)$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}(f)$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$.
4. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathscr{D}(f)$.
5. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, 1^- et 1^+.
6. Tracer l'allure de la représentation graphique de f.
7. Déterminer le domaine de définition de g et justifier que g est dérivable sur $]-1,1[$.
8. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,
$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$
9. Dresser le tableau des variations de g (on déterminera les limites aux bornes du domaine de définition).
10. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de g en 0 puis tracer l'allure du graphe de g (on fera figurer également la tangente en 0).

Exercice 2 *Inégalité de convexité*

On pose, dans cet exercice $h(x) = -\ln(1+x)$.

1. En étudiant la fonction g donnée par $g(x) = x - \ln(1+x)$, montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$,
$$-\ln(1+x) \geq -x.$$
2. Montrer que la tangente 0 à la courbe représentative de la fonction h satisfait l'équation $y = -x$. La courbe représentative de la fonction h est-elle située au-dessus ou en-dessous de sa tangente en 0 ?

Désormais, on considère une fonction f quelconque, définie sur $\mathbb{R}$, dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) \geq 0.$$

3. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f'(x) - f'(0)$. Que vaut $\varphi(0)$? Montrer, en faisant un tableau de variations, que φ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$.
4. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\psi(x) = f(x) - xf'(0) - f(0)$. Que vaut $\psi(0)$? Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que
$$\varphi(x) = \psi'(x).$$
En déduire, avec la question précédente, le signe de la fonction ψ.

5. Conclure que la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus de sa tangente en 0.
6. Déduire de la question précédente une nouvelle démonstration de la question 2.
7. Montrer que la courbe représentative de la fonction f est située au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes (une telle fonction est dite convexe).

Exercice 3 *Fonction cosinus hyperbolique et réciproque*

Fonction cosinus hyperbolique

On définit, lorsque c'est possible, la fonction f par

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f et justifier que f est dérivable sur son domaine de définition.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer la dérivée de la fonction puis la dérivée seconde de la fonction f. Que vaut $f'(0)$?
4. Déterminer la parité de f.
5. Dresser finalement le tableau des variations de f et tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.
6. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0.

Fonction réciproque

On considère désormais les fonctions g et φ définies, lorsque c'est possible par

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

et $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

7. Déterminer le domaine de définition de la fonction φ.
8. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$.
9. Montrer également que pour tout $x \in]-\infty, -1]$, $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$.
10. Conclure ainsi que g est définie sur $[1, +\infty[$.
11. Justifier avec précision que g est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Dans les trois questions suivantes, on considère deux réels x et y vérifiant $x \geq 0$ et $y = f(x)$.

12. Justifier que $y \geq 1$ puis montrer que
$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$
13. Montrer, lorsque $y \neq 1$, que $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$.
14. En déduire que $x = g(y)$ (on pourra poser $X = e^x$).
15. Conclure l'exercice en expliquant le lien entre f et g ainsi que la manière d'obtenir simplement la courbe représentative de g à partir de celle de f.
