Exercice 1 :

1) Si $x=0$ et $y \in \mathbb{R}$, $|x+y| = |0+y| = |y| = |y|+|0| = |y|+|x|$

Si $y=0$ et $x \in \mathbb{R}$, $|x+y| = |x+0| = |x| = |x|+|0| = |x+y|$.

Dans ces deux cas, l'égalité est vérifiée. Ainsi, si x ou y est nul, ceci constitue une condition suffisante pour avoir égalité.

2) Soit $z \in \mathbb{R}$. On fait une disjonction des cas.

Si $z \geqslant 0$, $|z| = z$.

Si $z < 0$, $|z| = -z \neq z$.

Ainsi, $|z| = z \iff z \in \mathbb{R}^+$.

3) Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

On a $|x+y|^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2$

et $(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2\underbrace{|x||y|}_{=|xy|} + |y|^2$.

Ainsi, comme $|x+y|$ $|x|+|y| \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}
|x+y| = |x|+|y| &\iff |x+y|^2 = (|x|+|y|)^2 \\
&\iff |x|^2 + 2xy + |y|^2 = |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \\
&\iff 2xy = 2|xy| \\
&\iff xy = |xy|.
\end{aligned}$$

4) Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

Si $x=0$ ou $y=0$ l'égalité est réalisée.

Lorsque $x, y \neq 0$, on a :

$|x+y| = |x|+|y| \iff xy = |xy|$.

Or $xy = |xy| \iff xy \in \mathbb{R}^+$ par la question 2. Ainsi $xy = |xy|$ si et seulement si x et y sont de même signe.

En conclusion, avec tous les cas :

$\boxed{|x+y| = |x|+|y| \text{ si et seulement si } x=0,\ y=0 \text{ ou que } x \text{ et } y \text{ sont de même signe.}}$

Exercice 2 :

1) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($\sin$ et $x \mapsto -x$).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$\varphi'(x) = \cos(x) - 1$.

Or $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $\varphi'(x) \leq 0$. On a le tableau :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de φ'	$-$	
variation de φ	$\searrow$	

2) On a $\varphi(0) = \sin(0) - 0 = 0$ et comme φ est décroissante sur $\mathbb{R}$, φ est négative sur $\mathbb{R}^+$.

3) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de φ et de $x \mapsto \frac{x^3}{6}$, dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$\varphi'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$

et

$\boxed{\varphi''(x) = -\sin(x) + x = -\varphi(x).}$

4) Comme $\varphi'' = -\varphi \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ (comme φ est négative sur $\mathbb{R}^+$), on a le tableau, puisque $\varphi'(0) = \cos(0) - 1 + \frac{0^3}{6} = 0$:

x	0	$+\infty$
signe de φ''	$+$	
variation de φ'	0 $\nearrow$	
signe de φ'	$+$	

φ' est positive sur $\mathbb{R}^+$.

5) Avec le signe de φ' et le fait que $\varphi(0) = \sin(0) - 0 + \frac{0^3}{6} = 0$, on a le tableau :

x	0	$+\infty$
signe de φ'	$+$	
variation de φ	0 $\nearrow$	

Ainsi φ est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

Par 2) $\varphi(x) \leq 0 \iff \sin(x) \leq x$.

Par 4) $\varphi(x) \geq 0 \iff \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.$$

6) Soit $x \in]0, +\infty[$. Comme $x > 0$, avec l'inégalité précédente :

$$\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{x}{x}$$

$$\iff \boxed{1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1}$$

Comme $\lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{x^2}{6} = 0$, par théorème d'encadrement, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet une limite en 0^+ et $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$.

7) Soit $x \in [0, -\infty[$. On a $-x \in [0, +\infty[$ donc :

$$(-x) - \frac{(-x)^3}{6} \leq \sin(-x) \leq -x$$

et par imparité

$$-\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \leq -\sin(x) \leq -x$$

d'où

$$x - \frac{x^3}{6} \geq \sin(x) \geq x.$$

L'inégalité (1) s'inverse sur $]-\infty, 0]$.

Par le même raisonnement qu'au 6), on a $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$:

Les limites à droite et à gauche étant les mêmes, on conclut que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}.$$

Exercice 3 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1$$
$$= x^3 - 1.$$

2) Le discriminant de x^2+x+1 est $-3 < 0$ donc ce trinôme ne possède pas de racine réelle et ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$ (car le coefficient dominant est positif)

Par suite, pour $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{x^3 - 1 \text{ est du signe de } x-1}$.

3) f est définie en $x \in \mathbb{R}$ lorsque $x^3 - 1 \geq 0$ c'est-à-dire, avec 2) lorsque $x \geq 1$.

Le domaine de définition de f est donc $[1, +\infty[$.

4) $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et lorsque $x \in]1, +\infty[$, $x^3 - 1 > 0$ donc f est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Soit $x \in]1, +\infty[$. On a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^3-1)}{2\sqrt{x^3-1}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}}.$$

5) On a $\lim\limits_{x \to 1} x^3 - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 1 = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Ainsi par composition, f admet une limite en 1 et en $+\infty$ et :

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}.$$

6) f est continue comme composée de fonctions continues sur $[1, +\infty[$.

$f' > 0$ sur $]1, +\infty[$ par 4) donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Par le théorème de la bijection, f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) = [\lim\limits_{x \to 1} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$
$= [0, +\infty[$.

7) Soit $y \in \mathbb{R}^+$ et $x \in [1, +\infty[$. On a :

$$y = \sqrt{x^3 - 1} \iff y^2 = x^3 - 1 \quad (y \geq 0)$$
$$\iff y^2 + 1 = x^3$$
$$\iff (y^2 + 1)^{\frac{1}{3}} = x.$$

Finalement, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\boxed{f^{-1}(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}}.$$

8) Pour $x \in [0, +\infty[$, $x^2 + 1 > 0$ donc f^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \in [0, +\infty[$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3} \frac{d}{dx}(x^2 + 1) \, (x^2 + 1)^{\left(\frac{1}{3} - 1\right)}$$
$$= \frac{1}{3} \, 2x \times (x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{2}{3} \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}}$$