Ce devoir est à rédiger individuellement pour la date précisée. On prendra garde à la rédaction et au soin apporté à la copie.

Exercice 1

Dans le cours, on a démontré l'inégalité triangulaire, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x|+|y|$, et on souhaite donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que l'égalité $|x+y| = |x|+|y|$ soit réalisée.

1. En prenant $x = 0$ ou $y = 0$, donner une condition suffisante pour que l'égalité soit réalisée.
2. Justifier que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $|z| = z$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}^+$.
3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tous deux non nuls. Montrer que $|x+y| = |x|+|y|$ si et seulement si $xy = |xy|$ (on pourra mettre $|x+y| = |x|+|y|$ au carré).
4. Conclure avec les questions précédentes que si $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| = |x|+|y|$ si seulement si $x = 0$, $y = 0$ ou que x et y sont de même signe.

Exercice 2

On démontre dans les questions 1 à 5, l'inégalité, valable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x. \tag{1}$$

On introduit les fonctions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \sin x - x \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

1. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de φ (pour le signe de la dérivée, on n'oubliera pas que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$).
2. Que vaut $\varphi(0)$? En déduire que φ est négative sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer ψ' et montrer que $\psi'' = -\varphi$.
4. Avec le signe de ψ'', dresser le tableau des variations de ψ' sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer le signe de ψ' sur $\mathbb{R}^+$.
5. Dresser finalement le tableau des variations de ψ sur $\mathbb{R}^+$ et conclure quant à l'inégalité (1).
6. Justifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$:
$$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$
Conclure sur l'existence et la valeur de
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}.$$
7. Que devient l'inégalité (1) lorsque $x \in]-\infty, 0]$? Que peut- on en déduire ?

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.
2. Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, que le trinôme (x^2+x+1) ne possède pas de racine réelle et déterminer son signe. En déduire, suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$, le signe de $x^3 - 1$.
3. Déterminer, avec la question précédente, le domaine de définition de f.
4. Justifier que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x \in]1, +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$.
5. Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$ et dresser le tableau des variations de f.
6. Montrer que f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
7. Étant donné $y \in \mathbb{R}^+$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in [1+\infty[$: $y = \sqrt{x^3 - 1}$. Déterminer ainsi une expression de f^{-1}, l'application réciproque de f.
8. Calculer la dérivée de f^{-1} sur $[0, +\infty[$.