PCSI

Cet énoncé comporte deux problèmes indépendants qu'il faut traiter en 4h. La gestion du temps est libre mais il est conseillé de passer 2h sur chaque problème.

Bon courage !

Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Justifiez et **rédigez** toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Problème 1 : Endomorphismes de rang 1 (adapté de e3a PC)

Ce problème étudie les endomorphismes de rang 1. Les trois premières parties consistent à étudier des exemples et la partie IV est une étude théorique.

Partie I : Des suites récurrentes

On pose $u_0 = -3$, $v_0 = -2$, $w_0 = 1$ et on définit, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& -\frac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ v_{n+1} &=& -\frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} &=& \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n) \end{array}\right. .$$

I.1.a Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} + 2w_{n+1}$ en fonction de $v_n + 2w_n$.

I.1.b En déduire, en effectuant une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n + 2w_n = 0$.

I.1.c Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + 3w_n = 0$.

I.1.d Montrer ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -\frac{1}{2}w_n$. En déduire une expression de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et sa limite.

I.1.e En déduire également une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et leurs limites.

On souhaite effectuer une nouvelle approche des questions précédentes.

I.2.a Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = MX_n$.

On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I.2.b Calculer P^{-1}, donner l'expression, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de D^n et montrer que $M = PDP^{-1}$

I.2.c Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$ et $X_n = M^nX_0$.

I.2.d Déterminer ainsi à nouveau l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que leurs limites.

Partie II : Une matrice de carré nul

On pose

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

II.1 Calculer A^2 et le rang de A. A peut-elle être inversible ?

II.2 On considère f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Justifier que pour tous $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f\big((x,y,z)\big) = \left(\frac{2x-2y-z}{9}, \frac{4x-4y-2z}{9}, \frac{-4x+4y+2z}{9}\right).$$

Que vaut $f \circ f$?

On définit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $e_1 = \frac{1}{3}(1,2,-2)$, $e_2 = \frac{1}{3}(2,1,2)$ et $e_3 = \frac{1}{3}(2,-2,-1)$.

II.3 Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ (on exprimera $f(e_3)$ en fonction de e_1).

II.4 Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

II.5 Déterminer l'expression de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ notée $\mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

II.6 Calculer le rang et la dimension du noyau de f.

II.7 On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2x-2y-z \end{array}.$$

Montrer que φ est une application linéaire et déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f\big((x,y,z)\big) = \varphi\big((x,y,z)\big)\, a.$$

Partie III : Matrice d'un endomorphisme de rang 1

On rappelle que $\mathbb{R}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^1$. On considère l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+2z \end{array}$$

et on pose, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f\big((x,y,z)\big) = \varphi\big((x,y,z)\big)\,(0,0,1)$.

III.1 Quelle est la dimension de $\mathbb{R}$? De quel espace vectoriel $\mathrm{Im}(\varphi)$ est-il un sous-espace vectoriel ? En déduire que $\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) = 0$ ou 1.

III.2 Montrer que $\varphi\big((0,0,1)\big) \neq (0,0,0)$. En déduire que $\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) = 1$, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et $\dim\big(\ker(\varphi)\big) = 2$.

III.3 On considère $\mathscr{B} = \big((1,-1,0),(1,0,-1),(0,0,1)\big)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

III.4 Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ et donner le rang de f.

Partie IV : Étude théorique

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a \neq 0$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère une application linéaire **non nulle** φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et on pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \varphi(x)\, a.$$

Pour le IV.1, on pourra s'aider de l'exemple de la partie III.

IV.1.a Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

IV.1.b Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = 0$ si et seulement si $\varphi(x) = 0$. En déduire que $\ker(f) = \ker(\varphi)$.

IV.1.c Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et déterminer, en fonction de n, la dimension de $\ker(\varphi)$ et de $\ker(f)$ puis le rang de f.

On suppose dans IV.2 que $\varphi(a) \neq 0$. On considère $e_1, \ldots, e_{n-1}$ une base de $\ker(\varphi)$ et on pose $e_n = a$. On souhaite montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

IV.2.a Montrer, en composant l'égalité précédente par φ, que $\lambda_n\, \varphi(a) = 0$ et en déduire que $\lambda_n = 0$.

IV.2.b Montrer également que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

IV.2.c En déduire que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et que la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de f est de la forme

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi(a) \end{pmatrix}.$$

On suppose dans IV.3 que $\varphi(a) = 0$.

IV.3.a Montrer que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$, l'application nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

IV.3.b Montrer qu'il existe $e_2, \ldots, e_n$ vérifiant $f(e_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\big(f(e_n), e_2, \ldots, e_{n-1}\big)$ est une base de $\ker(f)$.

IV.3.c Montrer que $\big(f(e_n), e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et écrire la matrice de f dans cette base.

IV.4.a On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ de rang 1. Montrer qu'il existe une application linéaire φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \varphi(x)\,a$.

IV.4.b Quelles sont les différentes formes possibles de la matrice d'un endomorphisme de rang 1 ?

Problème 2 : Inégalité de Berstein (adapté de Centrale PC)

Le but du problème est de montrer une inégalité sur certains types de fonctions modélisant la propagation des ondes. On étudie d'abord en partie I certains polynômes dont les racines serviront en partie II à étudier quelques propriétés de ces fonctions. La partie III permet de démontrer finalement l'inégalité.

Partie I : Polynômes de Tchebychev

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $T_n(t) = \cos\big(n \arccos(t)\big)$.

I.1 Justifier que T_n est définie sur $[-1,1]$ et rappeler la simplification de $\cos\big(\arccos(x)\big)$ pour $x \in [-1,1]$.

I.2 Donner l'expression de T_0 et T_1 et montrer que pour tout $t \in [-1,1]$, $T_2(t) = 2t^2 - 1$.

I.3 Calculer $T_n(0)$, $T_n(1)$ et $T_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.4 Rappeler l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction arccos.

I.5 Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que pour tout $t \in]-1,1[$:

$$T_n'(t) = \frac{n \sin\left(n \arccos(t)\right)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Calculer également T_n'' sur $]-1,1[$.

I.6 En faisant le changement de variable $t = \cos x$, montrer que $\arccos(t) \underset{t \to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-t)}$.

I.7 En déduire que T_n est dérivable en 1 et la valeur de $T_n'(1)$.

I.8 Avec les questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]-1,1[$:

$$(1-t^2)\,T_n''(t) - t\,T_n'(t) + n^2\,T_n(t) = 0.$$

I.9 Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que T_n est une fonction polynomiale (on exprimera, avec la question précédente, T_n en fonction de ses dérivées et on effectuera une récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$).

I.10 Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de T_n.

I.11 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

I.12 Pour $n \in \mathbb{N}$, quels sont les réels $x \in [0,\pi]$ vérifiant $\cos(nx) = 0$?

I.13 En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la factorisation de T_n : pour tout $t \in [-1,1]$,

$$T_n(t) = a_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(t - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$$

(on ne demande pas la valeur de a_n).

Partie II : Polynômes trigonométriques

On appelle polynôme trigonométrique de degré $n \in \mathbb{N}^*$ une fonction de la forme

$$\varphi : x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)\big)$$

où a_0, a_k, b_k sont des réels, $k \in [\![1,n]\!]$. On considère un polynôme trigonométrique φ de la forme précédente.

II.1 Montrer φ est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II.2 Justifier que $|\varphi|$ et $|\varphi'|$ atteignent leur maximum sur $[0,2\pi[$.

II.3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = a_0 + \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n}(a_k + i b_k)\, e^{ikx} - \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n}(a_k - i b_k)\, e^{-ikx}.$$

II.4 En déduire qu'il existe des nombres complexes $c_{-n}, \dots, c_0, \dots, c_n$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx}$$

qu'on exprimera, en distinguant les cas, en fonction de a_k et b_k.

II.5 En déduire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^{-inx} P(e^{ix})$ où

$$P(X) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k.$$

Combien P possède-t-il au plus de racines complexes distinctes ?

II.6 Montrer que si φ s'annule au moins $2n+1$ fois dans $[0,2\pi[$ alors φ est nulle sur $\mathbb{R}$.

II.7 Montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré n est un espace vectoriel dont on donnera la dimension.

Partie III : Inégalité de Bernstein

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère à nouveau un polynôme trigonométrique φ de degré n non nul et on suppose (les existences étant justifiées par la question II.2) que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| = \varphi'(0).$$

On souhaite montrer que $\varphi'(0) \leq n$ et on va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\varphi'(0) > n.$$

On considère la fonction

$$S : x \mapsto \frac{\varphi'(0)}{n}\sin(nx) - \varphi(x)$$

et on note, en relation avec la partie I, pour $k \in \mathbb{Z}$: $x_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.

III.1 Justifier que S, S' et S'' sont des polynômes trigonométriques de degré n.

III.2 Montrer que pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$S(x_k) = \frac{(-1)^k}{n}\big(\varphi'(0) - (-1)^k n\, \varphi(x_k)\big).$$

III.3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(0) - (-1)^k n\, \varphi(x) > 0$.

III.4 En déduire, pour $k \in \mathbb{Z}$, le signe de $S(x_k)$ et montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que

$$S(y_k) = 0.$$

III.5 Justifier que $y_1, \dots, y_{2n-1} \in [0,2\pi[$ et que y_0 ou $y_0 + 2\pi$ est dans $[0,2\pi[$. En déduire que S s'annule au moins $2n$ fois sur $[0,2\pi[$.

III.6 En déduire, en citant précisément le théorème, que S' s'annule au moins $2n-1$ fois sur $]0,2\pi[$.

III.7 Calculer $S'(0)$ et $S'(2\pi)$ et montrer que S' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0,2\pi]$.

III.8 Montrer que S'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0,2\pi[$ (on calculera $S''(0)$). En déduire, à l'aide de II.6, que $\varphi'(0) \leq n$.

III.9 Montrer, de façon générale, l'inégalité de Bernstein : pour tout polynôme trigonométrique f

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq n \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

III.10 Donner une fonction pour laquelle cette inégalité est une égalité.