

Vous laisserez une marge en haut sur la première page et sur le côté gauche de votre copie pour les annotations.

Justifiez et rédigez toutes vos réponses : la clarté et la précision sont prises en compte dans l'évaluation.

La calculatrice est interdite.

Problème 1 : Endomorphismes de rang 1 (adapté de e3a PC 2010)

Ce problème étudie les endomorphismes de rang 1. Les trois premières parties consistent à étudier des exemples et la partie IV est une étude théorique.

Partie I : Des suites récurrentes

On pose $u_0 = -3, v_0 = -2, w_0 = 1$ et on définit, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -\frac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n) \end{cases} .$$

- I.1.a Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} + 2w_{n+1}$ en fonction de $v_n + 2w_n$.
- I.1.b En déduire, en effectuant une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n + 2w_n = 0$.
- I.1.c Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + 3w_n = 0$.
- I.1.d Montrer ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -\frac{1}{2}w_n$. En déduire une expression de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et sa limite.
- I.1.e En déduire également une expression de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et leurs limites.

On souhaite effectuer une nouvelle approche des questions précédentes.

- I.2.a Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on ait, pour tout $n \in \mathbb{N} : X_{n+1} = MX_n$.

On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

- I.2.b Calculer P^{-1} , donner l'expression, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de D^n et montrer que $M = PDP^{-1}$
- I.2.c Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$ et $X_n = M^nX_0$.
- I.2.d Déterminer ainsi à nouveau l'expression des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que leurs limites.

Partie II : Une matrice de carré nul

On pose

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

- II.1 Calculer A^2 et le rang de A . A peut-elle être inversible ?
- II.2 On considère f l'endomorphisme canoniquement associé à A . Justifier que pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f((x, y, z)) = \left(\frac{2x - 2y - z}{9}, \frac{4x - 4y - 2z}{9}, \frac{-4x + 4y + 2z}{9} \right) .$$

Que vaut $f \circ f$?

On définit les vecteurs de \mathbb{R}^3 : $e_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$, $e_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ et $e_3 = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$.

- II.3 Calculer $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ (on exprimera $f(e_3)$ en fonction de e_1).
- II.4 Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

II.5 Déterminer l'expression de la matrice de f dans la base \mathcal{B} notée $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

II.6 Calculer le rang et la dimension du noyau de f .

II.7 On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto 2x - 2y - z \end{aligned}$$

Montrer que φ est une application linéaire et déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f((x, y, z)) = \varphi((x, y, z)) a.$$

Partie III : Matrice d'un endomorphisme de rang 1

On rappelle que \mathbb{R} est le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^1 . On considère l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x + y + 2z \end{aligned}$$

et on pose, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = \varphi((x, y, z)) (0, 0, 1)$.

III.1 Quelle est la dimension de \mathbb{R} ? De quel espace vectoriel $\text{Im}(\varphi)$ est-il un sous-espace vectoriel ? En déduire que $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 0$ ou 1.

III.2 Montrer que $\varphi((0, 0, 1)) \neq (0, 0, 0)$. En déduire que $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 1$, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et $\dim(\ker(\varphi)) = 2$.

III.3 On considère $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 0, 1))$. Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

III.4 Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} et donner le rang de f .

Partie IV : Étude théorique

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a \neq 0$ un vecteur de \mathbb{R}^n . On considère une application linéaire **non nulle** φ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et on pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \varphi(x) a.$$

Pour le IV.1, on pourra s'aider de l'exemple de la partie III.

IV.1.a Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n .

IV.1.b Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = 0$ si et seulement si $\varphi(x) = 0$. En déduire que $\ker(f) = \ker(\varphi)$.

IV.1.c Montrer que $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et déterminer, en fonction de n , la dimension de $\ker(\varphi)$ et de $\ker(f)$ puis le rang de f .

On suppose dans IV.2 que $\varphi(a) \neq 0$. On considère e_1, \dots, e_{n-1} une base de $\ker(\varphi)$ et on pose $e_n = a$. On souhaite montrer que (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{R}^n . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

IV.2.a Montrer, en composant l'égalité précédente par φ , que $\lambda_n \varphi(a) = 0$ et en déduire que $\lambda_n = 0$.

IV.2.b Montrer également que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

IV.2.c En déduire que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de \mathbb{R}^n et que la matrice dans la base \mathcal{B} de f est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varphi(a) \end{pmatrix}.$$

On suppose dans IV.3 que $\varphi(a) = 0$.

IV.3.a Montrer que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$, l'application nulle de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

IV.3.b Montrer qu'il existe e_2, \dots, e_n vérifiant $f(e_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ et $(f(e_n), e_2, \dots, e_{n-1})$ est une base de $\ker(f)$.

IV.3.c Montrer que $(f(e_n), e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de \mathbb{R}^n et écrire la matrice de f dans cette base.

IV.4.a On considère un endomorphisme f de \mathbb{R}^n de rang 1. Montrer qu'il existe une application linéaire φ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \varphi(x)a$.

IV.4.b Quelles sont les différentes formes possibles de la matrice d'un endomorphisme de rang 1 ?

Problème 2 : Fonction polylogarithme (extrait des Petites Mines 2010)

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction polylogarithme, utile en mécanique quantique, définie par :

$$L(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

Partie I : Étude de la fonction intégrée

On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

I.1 Justifier que f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$.

I.2 Déterminer les expressions de f' , f'' et f''' et calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f'''(0)$.

I.3 Donner un développement limité de f en 0 à l'ordre 3 (on pourra utiliser la formule de Taylor-Young ou donner directement le résultat du cours).

On considère désormais la fonction ℓ donnée par

$$\ell(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

I.4 Justifier que ℓ est dérivable $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$ et montrer que pour tout $x \in] -1, +\infty[\setminus\{0\}$:

$$\ell'(x) = \frac{h(x)}{x^2(1+x)}$$

$$\text{où } h(x) = x - (1+x)\ln(1+x).$$

I.5 En dressant le tableau des variations de h pour en déterminer son signe, montrer que ℓ' est négative sur $] -1, +\infty[\setminus\{0\}$.

I.6 Déterminer les limites de ℓ en -1 et en $+\infty$.

I.7 À l'aide de la question I.3, montrer que ℓ admet le développement limité en 0 :

$$\ell(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

I.8 Quelle est la limite de ℓ en 0 ? Justifier que ℓ admet un prolongement par continuité sur $] -1, +\infty[$ que l'on notera à nouveau ℓ (on donnera la valeur de $\ell(0)$).

I.9 Montrer que ℓ est dérivable en 0 et déterminer $\ell'(0)$. Conclure que ℓ' est négative sur $] -1, +\infty[$.

I.10 Déterminer la position relative de la courbe de ℓ par rapport à sa tangente en 0 au voisinage de 0.

I.11 Dresser à l'aide des questions précédentes le tableau des variations de ℓ sur $] -1, +\infty[$.

I.12 Montrer que ℓ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$ (pour calculer la limite de ℓ' en 0, on pourra se servir des développements limités calculés précédemment).

Partie II : Une expression de $L(1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $L(x)$ est posé au début du problème.

II.1 À l'aide de la question I.8, justifier que $L(1)$ est bien défini.

II.2 Justifier que pour tout réel t différent de -1 :

$$1 - t + t^2 + \dots + (-t)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1 - (-t)^n}{1+t}.$$

II.3 En déduire, en écrivant $\frac{1 - (-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$, que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt = \ln(1+x) - (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

II.4 Justifier que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

II.5 En reprenant la notation ℓ de la partie I, montrer, avec II.3 et II.4, que pour tout $x \in]0, 1]$,

$$\ell(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^k}{k+1} = \frac{(-1)^n}{x} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

II.6 En justifiant que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\left| \frac{t^n}{1+t} \right| \leq t^n$, montrer que pour tout $x \in]0, 1]$:

$$\left| \frac{(-1)^n}{x} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{x^n}{n+1}.$$

II.7 En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\left| \ell(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^n}{n+1}$$

puis que

$$\left| \int_0^1 \ell(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{k+1} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx.$$

II.8 Montrer ainsi que :

$$\left| L(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

II.9 Conclure que $L(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2}$ et

$$L(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

Partie III : Dérivées successives de L

III.1 À l'aide de I.8, justifier que L est définie et dérivable sur \mathbb{R}^+ . Quelle est la dérivée de L ? Que vaut $L(0)$?

III.2 Justifier que ℓ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^{+,*}$. En déduire que L est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et donner une relation entre les dérivées successives de L et de ℓ .

On souhaite démontrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : il existe un polynôme à coefficients réels $T_n \in \mathbb{R}[X]$ et un réel a_n tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$\ell^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}.$$

III.3 Montrer que la propriété est vraie pour $n = 1$ (on pourra revoir I.4). Que valent T_1 et a_1 ?

III.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$

$$\ell^{(n+1)}(x) = \frac{T_n'(x)(1+x)x - T_n(x)(2nx+n) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1} x^{n+1}} - (n+1)a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}.$$

III.5 Conclure la récurrence en donnant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre T_{n+1} , T_n , T_n' et a_n et entre a_n et a_{n+1} . Donner ainsi une expression simple de a_n .

III.6 Montrer que T_n est à coefficients entiers.