TD E1 : Probabilités

Exercice TD E1.1
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = [\![0, n]\!]$. Montrer que pour un certain réel λ, on peut définir une probabilité P sur Ω tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ P(\{k\}) = \frac{\lambda}{3^k}\binom{n}{k}.$$

Calculer ensuite $P(I)$, où I est l'ensemble des nombres impairs compris entre 1 et n.

Exercice TD E1.2
Une urne contient $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$; on en tire $p \leqslant 2n$ sans remise.

1. Si $p = 2$, quelle est la probabilité d'obtenir d'abord un jeton portant un numéro pair puis un jeton portant un numéro impair ? Quelle est la probabilité de tirer un jeton pair et un jeton impair, dans n'importe quel ordre ?
2. Quelle est la probabilité des jetons dont les numéros forment une suite croissante ?
3. Quelle est la probabilité des jetons portant des numéros consécutifs et dans l'ordre croissant ?

Exercice TD E1.3
On considère une boite contenant 100 jetons, numérotés de 1 à 100. On y effectue n tirages avec remise.

1. Quelle est la probabilité de tirer exactement un jeton portant un numéro pair ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité de tirer exactement $2k$ jetons avec un numéro pair ?
3. Quelle est la probabilité de tirer un nombre pair de jetons possédant un numéro pair ?

Exercice TD E1.4
On dispose de trois jetons : le jeton A qui a deux faces noires, le jeton B qui a une face noire et une face blanche, et le jeton C qui a deux faces blanches. On en choisit un au hasard et on le lance. Quelle est la probabilité que sa face supérieure soit blanche ?

Exercice TD E1.5
On lance un dé, puis on effectue deux tirages d'une boule sans remise :

— dans l'urne U contenant 9 boules blanches et 1 noire si le dé sort un 1 ;

— dans l'urne V contenant 3 boules blanches et 7 noires sinon ;

1. Les évènements « la première boule tirée est blanche » et « la deuxième boule tirée est noire » sont-ils indépendants ?
2. On obtient une boule blanche et une noire. Dans quel ordre est-il plus probable qu'on les ait tirés ?

Exercice TD E1.6
On considère deux urnes, la première contenant une boule rouge et trois boules bleues, la seconde contenant une boule bleue et trois boules rouges. On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule dans celle-ci. Sachant que l'on a obtenu une boule bleue, quelle est la probabilité que le tirage fut effectué dans la seconde urne ?

Exercice TD E1.7
On considère une population qui compte $0,2\%$ de personnes infectées par un virus donné. Un test de dépistage présente les caractéristiques suivantes :

— une personne infectée aura un résultat positif à ce test dans 99% des cas.

— une personne saine aura un résultat négatif à ce test dans $99,9\%$ des cas.

Calculer la probabilité qu'une personne qui a obtenu un résultat positif à ce test soit effectivement infectée.

Exercice TD E1.8

On admet que chaque enfant qui naît a la même probabilité d'être un garçon ou une fille. On considère un Monsieur X qui a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité que Monsieur X ait une seule fille ?
2. Quelle est la probabilité que Monsieur X ait une seule fille sachant qu'il en a au moins une ?
3. On suppose que chacun des enfants de Monsieur X répond au téléphone avec la même probabilité, et que eux seuls répondent. Sachant que Madame Y a téléphoné hier, et qu'un garçon lui a répondu, quelle est la probabilité pour que Monsieur X ait un seul garçon ?
4. Reprendre ensuite cette question en supposant que les filles répondent deux fois plus souvent au téléphone que les garçons.

Exercice TD E1.9

On considère une urne blanche, contenant une boule blanche et une boule noire, ainsi qu'une urne noire, contenant une boule blanche et deux boules noires. On commence par tirer avec remise une boule dans l'urne blanche, puis on tire successivement des boules, avec remise, en suivant le protocole suivant : si la n-ième boule tirée est blanche (resp. noire), alors la $(n+1)$-ième boule est prélevée dans l'urne blanche (resp. noire).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle B_n l'évènement « effectuer le n-ième tirage dans l'urne blanche », et W_n l'évènement « obtenir une boule blanche au n-ième tirage ».

1. Dessiner un arbre représentant la situation lors des deux premiers tirages. En déduire $P(W_2)$ et $P(B_2)$.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, donner une relation entre $P(B_n)$ et $P(B_{n+1})$, puis exprimer $P(B_n)$ en fonction de n.
3. En déduire $P(W_n)$ en fonction de n.
4. Calculer la limite en $+\infty$ de $P(W_n)$. Interpréter le résultat.

Exercice TD E1.10

Une puce se déplace sur trois cases notées C_1, C_2 et C_3. On suppose qu'à l'instant 0 elle se trouve en C_1. À l'instant n, on suppose que :

— Si la puce est sur C_1, elle peut passer à l'instant suivant sur C_2 ou C_3 de manière équiprobable.

— Si la puce est sur C_2, elle peut passer à l'instant suivant sur C_1 ou C_3 de manière équiprobable.

— Si la puce est sur C_3, elle y reste à l'instant suivant.

Soit alors U_n (resp. V_n et W_n) l'évènement « à l'instant n, la puce est sur la case C_1 » (resp. C_2, C_3). On pose alors $a_n = P(U_n), b_n = P(V_n)$ et $c_n = P(W_n)$.

1. Exprimer a_{n+1} (resp. b_{n+1} puis c_{n+1}) en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. Déterminer une relation vérifiée par les termes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire c_n en fonction de n.
4. Calculer la probabilité que la puce finisse sur la case C_3.