TD D2 : Géométrie dans l'espace

Sauf mention contraire, dans les exercices suivants, $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ sera un repère orthonormé direct de l'espace $\mathscr{E}$.

Exercice TD D2.1
Déterminer des équations et représentations paramétriques des plans suivants :

1. $\mathscr{P}$ passant par $A(-1,2,3)$ et dirigé par $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(0,1,4)$.
2. $\mathscr{R}$ passant par $A(-1,2,3)$ et parallèle au plan Π d'équation $3x+y-z=0$.
3. $\mathscr{S}$ passant par $A(-1,2,3)$ et contenant la droite Δ d'équation $\begin{cases} 3x+y-z+2=0 \\ x-y+z-4=0 \end{cases}$.

Exercice TD D2.2
Déterminer des équations et représentations paramétriques des droites de l'espace suivantes :

1. $\mathscr{D}_2$ passant par $A(-1,2,3)$ et $B(2,-1,4)$.
2. $\mathscr{D}_3$ passant par $A(-1,2,3)$ et parallèle la droite Δ d'équation $\begin{cases} 3x+y-z+2=0 \\ x-y+z-4=0 \end{cases}$.

Exercice TD D2.3
Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé direct de l'espace, Ω le point de coordonnées $(1,0,0)$, et $\overrightarrow{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{v}(0,1,0)$, $\overrightarrow{w}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1. Est-ce que $\mathcal{R}' = (\Omega; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est un repère orthonormé direct ?
2. Écrire les formules de changement de repère entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.
3. Quelle est l'équation dans $\mathcal{R}'$ du plan $\mathscr{P}$ d'équation $\sqrt{2}x+2y+\sqrt{2}z=0$ dans $\mathcal{R}$?

Exercice TD D2.4
Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathscr{D}'$ projetée orthogonale sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+2y-3z-1=0$ de la droite $\mathscr{D}$ d'équation :

$$\begin{cases} x = z+1 \\ y = z-1 \end{cases}$$

Exercice TD D2.5
Déterminer une équation du plan passant par $A(2,-1,4)$ et parallèle aux droites :

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x-1=2y \\ y=z-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} 6-2x=y \\ z=y-2 \end{cases}.$$

Exercice TD D2.6
Déterminer une équation de la perpendiculaire commune aux droites :

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} 2x+5y+z=9 \\ x+3y+2z=5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} 2x+3y-3z=7 \\ x+2y-z=5 \end{cases}.$$

Exercice TD D2.7
Soient S le point de coordonnées $(-1,1,3)$, les plans $\mathscr{P}_1 : x-y-z-2=0$ et $\mathscr{P}_2 : x-2y+3z+1=0$ et les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations :

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Calculer les distances $\mathrm{d}(S,\mathscr{P}_1)$, $\mathrm{d}(S,\mathscr{P}_2)$, $\mathrm{d}(S,\mathscr{D}_1)$, $\mathrm{d}(S,\mathscr{D}_2)$ et $\mathrm{d}(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)$.

Exercice TD D2.8

Déterminer une équation des sphères suivantes :

1. $\mathscr{S}$ la sphère de diamètre $[PQ]$, avec $P\,(2,-1,0)$ et $Q\,(-1,5,2)$.
2. $\mathscr{S}'$ la sphère de centre P et tangente au plan $\mathscr{P} : x+y-z-2=0$.

Exercice TD D2.9

Déterminer une équation du cercle circonscrit à ABC, avec : $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$.

Exercice TD D2.10

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$ admette une solution $\overrightarrow{x}$.
2. Résoudre l'équation $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.