TD D1 : Géométrie du plan

Exercice TD D1.1
Soient A, B, C trois points non alignés.

1. Montrer que les médiatrices du triangle ABC sont concourantes. En déduire qu'il existe un unique cercle passant par les points A, B et C.
2. Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes (On utilisera le produit scalaire).

Exercice TD D1.2
Soient A, B, C trois points non alignés, A', B' et C' respectivement les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, et G le point d'intersection des droites (BB') et (CC').

1. Montrer que $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{B'C'}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$ et $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
3. En déduire que les médianes du triangle ABC sont concourantes en G.
4. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{-1}{2}$. Déterminer l'image par h des points A, B et C.
5. Déterminer l'image par h des hauteurs du triangle ABC.
6. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont alignés. À quelle condition sont-ils confondus ? Dans le cas contraire, la droite qui passe par ces trois points s'appelle la droite d'Euler.

Exercice TD D1.3
Soit $ABCD$ un carré direct. On construit deux points $P \in [AB]$ et $Q \in [BC]$ tels que $BP = BQ$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (PC). Montrer que (QH) et (HD) sont orthogonales (on pourra se placer dans le repère $\left(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$).

Exercice TD D1.4
Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère du plan. Déterminer, en fonction du paramètre réel m, si les droites suivantes sont confondues, parallèles ou sécantes :

$$\mathscr{D}_m : y - (2m+1)x + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D}'_m : y + 3mx + m = 0.$$

Exercice TD D1.5
Soit un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$.

1. Soit $\overrightarrow{I} = \sqrt{3}\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{J} = -\sqrt{3}\overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath}$. Montrer que $\mathcal{R}' = \left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ est un repère de $\mathcal{P}$ et écrire les formules de changement de repère.
2. On considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points du plan dont les coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ vérifient : $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}x - 4y = 0$. Écrire une équation de $\mathscr{C}$ dans $\mathcal{R}'$ et tracer $\mathscr{C}$.

Exercice TD D1.6
On considère un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ du plan. Soient $M(-1, 2)$, $\mathscr{D}_1 : 3x + y - 5 = 0$, $\mathscr{D}_2 : x - 2y + 3 = 0$, $\mathscr{D}_3 : 4x - y - 9 = 0$. Calculer la distance de M à chacune de ces trois droites.

Exercice TD D1.7
Soient A et B deux points distincts d'un plan $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. On pose :

$$\mathcal{L}_k = \{M \in \mathcal{P} \mid MA = kMB\}.$$

1. Déterminer $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$.

On suppose maintenant que $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Soient G_k le point tel que $\overrightarrow{AG_k} = \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$ et G'_k le point tel que $\overrightarrow{AG'_k} = \dfrac{-k}{1-k}\overrightarrow{AB}$.

2. Montrer que $M \in \mathcal{L}_k \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_k} \cdot \overrightarrow{MG'_k} = 0$. En déduire la nature de $\mathcal{L}_k$.

Exercice TD D1.8
Le plan est rapporté à un repère quelconque $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On considère l'ensemble $\mathcal{U}$ des points de coordonnées (x, y) tels que : $x^2 - xy - 2y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{U}$ coupe l'axe (Ox) en un point P, et l'axe (Oy) en deux points distincts Q et R.
2. Soit $\mathcal{R}' = \left(P, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$. Déterminer une équation de $\mathcal{U}$ dans le repère $\mathcal{R}'$. En déduire la nature de $\mathcal{U}$.

Exercice TD D1.9
On considère les cercles $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ admettant pour équations respectives $x^2 + y^2 - 4 = 0$ et $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ dans un repère orthonormé direct quelconque.

1. Déterminer les centres Ω, Ω' et les rayons R, R' de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
2. Soit $k = \dfrac{R'}{R}$. Déterminer les coordonnées du centre I de l'homothétie de rapport k qui envoie Ω sur Ω'.
3. Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ d'ordonnée positive tel que la tangente à $\mathscr{C}$ en A passe par I.
4. Montrer que la droite (AI) est aussi tangente à $\mathscr{C}'$.

Exercice TD D1.10
Soient A, B deux points distincts du plan, et α un réel. Montrer que l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \alpha\,[\pi]$ est soit la droite (AB) privée des points A et B, soit un cercle passant par A et B, privé de A et B.