TD C4 : Espaces vectoriels

Exercice TD C4.1
Les familles de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous sont-elles libres ? génératrices ?

$$\mathscr{F}_1 = ((1,1),(1,-1)) \qquad \mathscr{F}_2 = ((2,0)) \qquad \mathscr{F}_3 = ((1,0),(0,1),(0,0))$$

Exercice TD C4.2
Les familles de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous sont-elles libres ? génératrices ?

$$\mathscr{F}_1 = ((1,1,2),(1,-1,3),(1,3,1)) \qquad \mathscr{F}_2 = ((1,1,2),(1,-1,3),(1,3,1),(0,1,3))$$

Exercice TD C4.3
Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $m \in \mathbb{R}$, la famille $((m,-1,1),(2,m-1,-2),(1,2,m))$ est-elle libre ?

Exercice TD C4.4
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (u,v,w)$ une famille libre de vecteurs de E. Indiquer si les familles suivantes sont libres ou pas.

$$\mathscr{F}_1 = (u,v) \ , \ \mathcal{F}_2 = (u+v, u-v) \ \text{ et } \ \mathcal{F}_3 = (u-w, v-u, w-v)$$

Exercice TD C4.5
Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de référence.

$$F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;\middle|\; x-4y=0 \text{ et } x+z=0\right\} \qquad F_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \;\middle|\; x+t=0 \text{ et } y+z=1\right\}$$
$$F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-y+3z \geqslant 0\right\} \qquad F_4 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$$
$$F_5 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(1) = 1\} \qquad F_6 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est croissante}\}$$
$$F_7 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_0 = u_1\right\}$$

Exercice TD C4.6
Donner une base des espaces vectoriels suivants.

$$E = \left\{(2x, 3y, x+y, x) \in \mathbb{K}^4 \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{K}^2\right\} \qquad F = \left\{x \mapsto \lambda + \mu x \;\middle|\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$G = \operatorname{Vect}\{(2,-2,1),(2,2,-1),(1,0,0)\} \qquad H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x+y-z+2t=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$$

Exercice TD C4.7
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels. Si oui, donnez-en une base.

1. L'ensemble des suites arithmétiques.
2. L'ensemble des suites géométriques.

Exercice TD C4.8 (0.1cm)
On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y \\ y-x \\ 2y \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner deux bases différentes de F.

Exercice TD C4.9
Soit F le sous-espace de $\mathbb{K}^4$ défini par les équations $x+2y-3t+z=0$ et $2x-y-t-3z=0$. Montrer que les vecteurs $u=(2,0,1,1)$ et $v=(0,2,1,-1)$ forment une base de F.

Exercice TD C4.10
Soient $u_1=(-1,1,1,3)$, $u_2=(1,3,-1,-1)$, $u_3=(1,1,-1,1)$, $v_1=(2,1,2,1)$, $v_2=(3,3,1,1)$. On pose $U=\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et $V=\operatorname{Vect}(v_1,v_2)$.

1. Déterminer une équation de U, de V puis de $U\cap V$.
2. En déduire une base de $U\cap V$.

Exercice TD C4.11
On pose $u_1=(2,1,-3)$, $u_2=(1,2,-3)$, $u_3=(3,3,-6)$, $E=\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ et
$F=\{(x,2x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

1. Donner une base de E, puis une base de F.
2. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice TD C4.12
Soient $E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\;\middle|\; x+y+z+t=0\right\}$ et $F=\{(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$. E et F sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$?

Exercice TD C4.13
Soit $E=\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout réel a, on pose $E_a=\{f\in E\mid f(a)=0\}$.

1. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que l'ensemble C des fonctions constantes est une droite vectorielle de E.
3. Montrer $E=E_a\oplus C$.

Exercice TD C4.14
Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux familles libres finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que la réunion de ces deux familles, $\mathscr{L}_1\sqcup\mathscr{L}_2$, est libre si, et seulement si, $\operatorname{Vect}\mathscr{L}_1\cap\operatorname{Vect}\mathscr{L}_2=\{0_E\}$.

Exercice TD C4.15
Soit E un espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $F\subset H$.

1. Montrer $(F+G)\cap H=F+(G\cap H)$.
2. Donner un contre-exemple lorsque F n'est pas inclus dans H.

Exercice TD C4.16
Pour chacune des applications suivantes, montrer qu'elle est linéaire, donner une base de son noyau et de son image.

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x+y)\end{array}\right.\qquad g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y,-z+x)\end{array}\right.$$

$$h:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y)\end{array}\right.\qquad k:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,x+y,x)\end{array}\right.$$

$$m:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & x-2y+3z\end{array}\right.\qquad \theta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ f & \longmapsto & f'\end{array}\right.$$

Exercice TD C4.17
Montrer que l'application $\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ (u_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\geqslant 0}\end{array}\right.$ est linéaire. Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice TD C4.18

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $p \in \mathbb{N}$. On suppose que E admet une famille génératrice $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_p)$. Montrer que $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.