TD C3 : Arithmétique et dénombrement

Exercice TD C3.1
Montrer que, pour tout entier n, $n^5 - n$ est un multiple de 30.

Exercice TD C3.2
Trouver $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\text{PGCD}(a, b) = 50$ et $\text{PPCM}(a, b) = 600$.

Exercice TD C3.3
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $2^n + 1$ et $2^{n+1} + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice TD C3.4
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose que $2^n - 1$ est premier. Montrer que n est premier.

Exercice TD C3.5
On dispose de trois séries de couleurs différentes (rouge, bleu et jaune) de cinq boules, les boules de chaque série étant numérotées de 1 à 5. On les range dans 15 cases numérotées de 1 à 15, à raison d'une boule par case.

1. Combien y a-t-il de rangements différents ?
2. Dans combien de ces rangements a-t-on :
   - 2.1. Dans l'ordre, 5 boules rouges, puis 5 bleues et enfin 5 jaunes ?
   - 2.2. La première case contenant une boule rouge est la case numéro 7 ?
   - 2.3. La première case contenant une boule rouge est la case numéro 7, et cette boule porte un numéro pair ?

Exercice TD C3.6
Une urne contient 10 boules jaunes, 5 boules bleues et 3 boules rouges. On suppose que deux boules de la même couleur sont distinguables. On en tire simultanément quatre.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages contenant au moins une boule rouge ?
3. Quel est le nombre de tirages contenant autant de boules bleues que de jaunes ?
4. Quel est le nombre de tirages contenant les trois couleurs ?

Exercice TD C3.7
Soit $n \geqslant 2$ un entier et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Une urne contient p boules blanches et $n - p$ boules noires. On suppose que les boules d'une même couleur sont indiscernables entre elles. On tire successivement les n boules de l'urne, sans remise.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Déterminer le nombre de tirages où la dernière boule blanche apparaît en k-ième position.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1}$.

Exercice TD C3.8
On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 52. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une « main » .

1. Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
2. Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :
   2.1. un carré ;
   2.2. un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeur) ;
   2.3. une double paire (deux paires sans full ni carré) ;
   2.4. un brelan ; (trois cartes de même valeur, sans full ni carré) ;
   2.5. une couleur (5 cartes de même couleur).

Exercice TD C3.9
On dispose de 32 joueurs de tennis. De combien de façons peut-on organiser le tableau des rencontres d'un tournoi ? Et si les deux têtes de séries ne peuvent se rencontrer qu'en finale ?

Exercice TD C3.10
Combien le mot *épinards* possède-t-il d'anagrammes ? Et le mot *pizzas* ? Et le mot *bicarbonate* ? Et le mot *anagramme* ?

Exercice TD C3.11
Soit E un ensemble fini. Calculer $\displaystyle\sum_{A \subset E} \operatorname{Card} A$.

Exercice TD C3.12
Soit E un ensemble fini et A, B, C trois parties de E. Montrer que :

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) = &\operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B + \operatorname{Card} C \\ &- \operatorname{Card}(A \cap B) - \operatorname{Card}(A \cap C) - \operatorname{Card}(B \cap C) \\ &+ \operatorname{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Exercice TD C3.13
Dénombrer le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, puis de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice TD C3.14
Soient n, p des entiers tels que $p \leqslant n$. Établir la formule :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p},$$

en évaluant de deux manières différentes le nombre de manières de choisir un groupe de p personnes parmi n, puis de choisir à l'intérieur de celui-ci un sous-groupe de cardinal quelconque.

Exercice TD C3.15

1. Soient p, q et r trois entiers tels que $p + q + r \geqslant 1$. Combien de mots de $p + q + r$ lettres peut-on former en utilisant p fois la lettre A, q fois la lettre B et r fois la lettre C ? Vérifier le résultat en prenant $p = q = r = 1$.
2. En déduire la formule :

$$(a + b + c)^n = \sum_{\substack{0 \leqslant i,j,k \leqslant n \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k.$$