# TD C2 : Applications

**Exercice TD C2.1**
Calculs d'image directe et réciproque On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array}$$

Calculer $f([-1,1])$ et $f^{-1}(\{1\})$, $g([-1,1])$ et $g^{-1}(\{1\})$.

**Exercice TD C2.2**
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $J$ à préciser.
2. Soit $y \in J$. Résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x$, et en déduire une expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de $y$.

**Exercice TD C2.3**
L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right.$ est-elle surjective ? injective ?

**Exercice TD C2.4**
Soient $E$, $F$ et $G$ des ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et $f$ est surjective alors $g$ est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et $g$ est injective alors $f$ est surjective.

**Exercice TD C2.5**
Soient $E$, $F$, $G$ trois ensembles.
Donner un exemple d'applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ telles que $g \circ f$ soit bijective, $g$ soit non injective et $f$ soit non surjective.

**Exercice TD C2.6**
Soient $E$, $F$, $G$ trois ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$ des applications.
Montrer que si, parmi les trois applications $h \circ g \circ f$ , $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$, deux sont injectives et la troisième surjective, alors les trois applications $f$, $g$ et $h$ sont bijectives.

**Exercice TD C2.7**
Soient $f$ une application de $E$ dans $F$ et $A$ (resp. $B$) une partie de $E$ (resp. $F$). Montrer les résultats suivants.

*i)* $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

*ii)* Si $f$ est surjective, alors $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

*iii)* $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$.

*iv)* Si $f$ est injective, alors $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$.

**Exercice TD C2.8**
Examiner l'injectivité et la surjectivité de chacune des fonctions ci-dessous, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$f : (x,y) \mapsto (y,x) \qquad\qquad g : (x,y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

**Exercice TD C2.9**
On considère les applications :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & \begin{cases} 2k & \text{si } k \geq 0, \\ -2k-1 & \text{si } k < 0. \end{cases} \end{array}.$$

Montrer que

$$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}.$$

Que dire de $f$ et $g$ ?