TD C1 : Logique, ensembles

Exercice TD C1.1
Soit x un réel. Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1. $x^2 = 9 \ldots x = 3$
2. $x \geq x^2 \ldots x \geq 0$
3. $\ln x = -3 \ldots x = \mathrm{e}^{-3}$
4. $\sqrt{x}$ existe $\ldots x \geq 0$
5. $|x| \leq 3 \ldots x \leq 3$
6. $x^2 \geq 4 \ldots x \geq 2$

Exercice TD C1.2
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Donner en français la signification des énoncés suivants et calculer leur négation.

i) $\forall (x,y) \in A^2,\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$

ii) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in A,\ y \leqslant x$

iii) $\exists a \in A,\ \forall x \in A,\ x \leqslant a$

iv) $\forall x \in A,\ \exists y \in \mathbb{R},\ y < x$

v) $\exists y \in A,\ \forall x \in A,\ x = y$

vi) $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ x \neq y$

vii) $\forall (x,y,z) \in A^3,\ x = y$ ou $y = z$ ou $x = z$.

Exercice TD C1.3
Soient P, Q, R trois assertions, les assertions A, B ci-dessous sont-elles équivalentes ?

$$A\ :\ (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R; \qquad B\ :\ P \Rightarrow (Q \Rightarrow R).$$

Exercice TD C1.4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$, d'abord en raisonnant par implication et réciproque, puis en raisonnant par équivalences.

Exercice TD C1.5
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $x + y + z = 1$, alors au moins l'un des trois réels x, y, z est dans l'intervalle $[0, 1/3]$.

Exercice TD C1.6
Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Pour toute partie X de E, on note $\overline{X}$ son complémentaire dans E. Montrer les résultats suivants.

i) $A \cap B \subset B$

ii) $B \subset A \cup B$

iii) $A \cup B = B \iff A \subset B$

iv) $A \cap B = B \iff B \subset A$

v) $A \subset \overline{B} \iff B \subset \overline{A}$

vi) $\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \overline{A}} = \varnothing$

vii) $(A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C) = A \smallsetminus (B \cup C)$

viii) $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$

Exercice TD C1.7
Écrire les ensembles suivants en extension : $A = \mathcal{P}(\varnothing)$, $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ et $C = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

Exercice TD C1.8
Soient E un ensemble et A, B des parties de E.

1. Écrire plus simplement les ensembles $A \cap (A \cup B)$ et $A \cup (A \cap B)$.
2. Démontrer que A et B sont égaux si, et seulement si, $A \cap B$ et $A \cup B$ sont égaux.

Exercice TD C1.9
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$ lorsque $p \in \mathbb{Z}$. A-t-on, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x+y \rfloor$?

Exercice TD C1.10
Étudier et tracer l'allure des courbes des fonctions

$$f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}.$$

Exercice TD C1.11
Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2\,x\lfloor x \rfloor = x^2 + \lfloor x \rfloor^2.$$