TD B5 : Formules de Taylor

Exercice TD B5.1
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes, là où c'est possible :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{1-x^2} \qquad h : x \mapsto (x^2+1)e^x$$

Exercice TD B5.2
Montrer que la fonction Arctan est dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

où T_n est un polynôme. On donnera une relation entre T_{n+1} et T_n.

Exercice TD B5.3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2}$.

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme H_n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = H_n(x)f(x)$ (on donnera au passage une relation de récurrence entre H_{n+1} et H_n).
3. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de H_n, ainsi que son terme de plus haut degré.

Exercice TD B5.4
Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathrm{e}^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice TD B5.5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $p : x \mapsto x^n(1+x)^n$.
2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
   (On pourra considérer le coefficient devant le terme de plus haut degré de p.)

Exercice TD B5.6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = (x^2-1)^n$.

1. Montrer que $\forall p \in [\![0, n-1]\!]\ ,\ f^{(p)}(-1) = f^{(p)}(1) = 0$.
2. En déduire que $f^{(n)}$ a exactement n zéros dans $]-1, 1[$.