TD B4 : Dérivation

Exercice TD B4.1

Soit $a > 0$. Préciser, pour chacune des fonctions ci-dessous, son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, et calculer sa dérivée là où elle est définie.

$$f : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}} \qquad g : x \mapsto \frac{x^a}{a^x} \qquad h : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Exercice TD B4.2

Soit $f : x \mapsto 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + \text{Arcsin}(2x - 1)$. Déterminer un expression simplifiée de f.

Exercice TD B4.3

Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner le développement limité d'ordre 1 au point a précisé.

1. $t \mapsto \sin(\omega t)$ en $a = \pi$;
2. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en $a = 0$;
3. $x \mapsto \sqrt{x}$ en $a = 1$;
4. $x \mapsto \ln(1 + x)$ en $a = 0$;
5. $n \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, en $a = +\infty$.

Exercice TD B4.4

Montrer que la fonction définie par $f : x \mapsto x^x$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Ce prolongement est-il dérivable ?

Exercice TD B4.5

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ réalise une bijection de $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} et calculer $(g^{-1})'$.

Exercice TD B4.6

Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ peut être prolongée par continuité en 0, et que son prolongement est dérivable en 0.

Exercice TD B4.7

La fonction $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$?

Exercice TD B4.8

Soient $a < b$ des réels et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe trois réels c_1, c_2, c_3 dans $[a, b]$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$, $f(c_2) = 0$, $f'(c_1) = 0$ et $f'(c_3) = 0$.

Exercice TD B4.9

1. Soit a un réel, f une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$, à valeurs réelles et telle que $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe un réel $c\in\,]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.
2. Montrer que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction dérivable et a des limites égales en $-\infty$ et $+\infty$, alors sa fonction dérivée s'annule au moins en un point.

Exercice TD B4.10
Soit f une fonction à valeurs réelles, dérivable sur $[0,1]$ et telle que $f(1)=f(0)=f'(0)=0$.

1. Montrer que la fonction $g: x\mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f dans un repère d'origine O tel que (OM) soit tangente à $\mathscr{C}_f$ en M.

Exercice TD B4.11
Soit $n\geqslant 1$ et $f: x\mapsto x^n\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer qu'on peut prolonger par continuité en 0 la fonction f. On note encore f son prolongement.
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice TD B4.12
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice TD B4.13
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\begin{cases}\cos(\sqrt{x}) & \text{si } x>0\\ \mathrm{ch}(\sqrt{-x}) & \text{si } x<0\end{cases}$$

f se prolonge-t-elle en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice TD B4.14

1. Montrer $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}}\leqslant\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.
2. En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ pour $k\geqslant 2$.
3. On pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Déterminer la limite de (u_n).