TD B3 : Limites, continuité

Exercice TD B3.1
Calculer les limites suivantes.

$i)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln\left(3x^2-4\right)-\ln\left(2x^2+1\right)\right)$ $\quad ii)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x(2+\cos x)$ $\quad iii)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2+1}}-e^x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

$iv)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ $\quad v)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\quad vi)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\lfloor x\rfloor$

Exercice TD B3.2
Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Déterminer (si elles existent) les limites suivantes :

$i)\ \lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ $\quad ii)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)$ $\quad iii)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+1-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

$iv)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(a^x+b^x\right)^{\frac{1}{x}}$ $\quad v)\ \lim\limits_{x\to0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice TD B3.3
La fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ admet-elle une limite en 0 ?

Exercice TD B3.4

1. Trouver toutes les fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$.
2. En déduire que les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $+\infty$.

Exercice TD B3.5
Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$.

Exercice TD B3.6
La fonction définie par $f(x)=x^x$ peut-elle être prolongée par continuité aux bornes finies de son domaine de définition ?

Exercice TD B3.7
Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}(1+x)e^{1/x} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Étudier la continuité de f.
3. Rechercher les asymptotes de f.

Exercice TD B3.8
Soit f la fonction : $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\end{array}\right.$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les équations $f(x)=1$ et $f(x)=-1$.
2. En déduire que la fonction f n'admet pas de limite en 0.
3. Montrer que la fonction g : $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\end{array}\right.$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice TD B3.9
Soit f la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en 1.
2. En déduire que f peut se prolonger en une fonction continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice TD B3.10
Soit f la fonction définie par $f(x)=xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit g la bijection réciproque de $f_{|\mathbb{R}_+}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{\ln x}=1$.

Exercice TD B3.11
Montrer que la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera, et définir sa bijection réciproque.

Exercice TD B3.12
Montrer que l'équation $\sin x=\ln x$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$.

Exercice TD B3.13
Pour tout entier n, on pose $f_n(x)=x+n\ln x$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n)=0$.
2. Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\in]0,1[$.
3. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice TD B3.14
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0)=f(1)$. Montrer qu'il existe $c\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ tel que

$$f\left(c+\frac{1}{2}\right)=f(c).$$

Exercice TD B3.15
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et convergente en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice TD B3.16
Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

Exercice TD B3.17

1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & 2\lfloor x\rfloor - x\end{array}\right.$ et montrer qu'elle est invariante par translation de vecteur $\overrightarrow{u}(1,1)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, et que f n'est croissante sur aucun intervalle.