TD B2 : Suites numériques

Exercice TD B2.1
Soit A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose : $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$. En justifiant les existences montrer que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Exercice TD B2.2
Déterminer, lorsqu'elles existent, les bornes inférieures et supérieures, le maximum et le minimum des ensembles suivants :

$$A=\left\{\frac{1}{n}\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\} \qquad B=\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\middle|\,(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}\right\}$$

Exercice TD B2.3
Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n>0$ par :

$$i)\ u_n=\frac{n^2-6n+3}{n^4+n} \qquad ii)\ u_n=\frac{2^{n+1}-3^{n+1}}{2^n+3^n} \qquad iii)\ u_n=\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$$

$$iv)\ u_n=n^2-n\cos(n)+2 \qquad v)\ u_n=\frac{\sin(n)}{\sqrt{n+1}} \qquad vi)\ u_n=\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n^2}$$

Exercice TD B2.4
Soit $x\in\mathbb{R}$. Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des suites de terme d'indice $n\in\mathbb{N}^*$ suivant :

$$r_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} \qquad s_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \qquad t_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

$$u_n=\sqrt[n]{n^2} \qquad v_n=n\sin\frac{1}{n^2} \qquad w_n=\sin\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right)$$

Exercice TD B2.5
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ converge.

Exercice TD B2.6
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice TD B2.7

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ admet une unique solution réelle positive α_n.
2. Étudier le sens de variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et prouver qu'elle converge.
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \alpha_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\alpha_n^{n+1}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$.

Exercice TD B2.8
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut-on en déduire ?

Exercice TD B2.9
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$.

1. Montrer que la suite est bien définie et que pour tout entier n, $u_n \geqslant 0$.
2. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

Exercice TD B2.10
Étudier le comportement de la suite réelle définie par $v_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + v_n^2$.

Exercice TD B2.11
On considère une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{z_n+6}{z_n+2}$.

1. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \in \mathbb{C} \setminus \{-3,-2\}$. Déterminer les limites possibles de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{z_n-2}{z_n+3}$ est géométrique.
3. En déduire la nature de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice TD B2.12
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

1. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que pour tout $n > n_0$ on a $0 < u_n < \dfrac{u_{n_0}}{2^{n-n_0}}$, puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice TD B2.13
On considère la suite (H_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout réel x vérifiant $1 > x > -1$, on a : $-\ln(1-x) \geq x \geq \ln(1+x)$.
2. En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, que
$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln(k) - \ln(k-1).$$
3. En sommant les inégalités précédentes, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:
$$1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$
4. Montrer que $(H_n/\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet pour limite 1.

Exercice TD B2.14
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite ℓ. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$
est convergente et admet pour limite ℓ.